Série VIII. — Tome VIII. N° 4. Avril 1947.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

LE RADIUM

LE CHAUFFAGE DE SUBSTANCES PEU CONDUCTRICES PAR COURANTS INDUITS DE HAUTE FRÉQUENCE

Par M. G. RIBAUD.
Laboratoire des Hautes Températures.

Sommaire. — Le chauffage par courants induits de haute fréquence est, la plupart du temps, limité à des corps relativement conducteurs s'échelonnant du cuivre au graphite. Le présent article précise les valeurs des énergies recueillies dans les corps mauvais conducteurs; les courbes tracées permettent en particulier de calculer, dans chaque cas, le rendement électrique du chauffage; elles montrent en particulier qu'avec des fréquences de l'ordre de 10^6, parfaitement réalisables avec les installations actuelles à lampes triodes, on peut atteindre d'excellents rendements dans des substances dont les résistivités électriques varient de 10^7 à 10^{10} C. G. S. et dont le diamètre dépasse 6 cm.

Les courbes d'énergies recueillies, en fonction de la fréquence et du diamètre, permettent en outre de déterminer expérimentalement la résistivité d'une substance déterminée. L'application de cette méthode est donnée pour un gaz sous faible pression dans lequel il est possible de développer, sous un diamètre 6 cm et une hauteur 12 cm, des puissances de plusieurs kilowatts correspondant à des densités de courant de l'ordre de 10 A : cm² et à des résistivités voisines de 10^8 C. G. S.

En général, dans la pratique du chauffage par courants induits de haute fréquence, les substances conductrices utilisées s'échelonnent, dans l'ordre des résistivités croissantes, du cuivre ($\rho = 2.10^3$ C. G. S.) au graphite ($\rho = 10^6$ environ), en passant par les métaux fondus dont les résistivités sont de l'ordre de 10^5 C. G. S.

Il n'est pas sans intérêt de rechercher dans quelle mesure le chauffage de substances nettement moins conductrices peut s'effectuer avec un rendement satisfaisant. Pour ces substances, les diamètres et les fréquences utilisés sont toujours tels que l'épaisseur de peau ε reste du même ordre que le diamètre d du cylindre constitué par la substance, et le calcul simple, qui suppose l'épaisseur de peau faible par rapport au diamètre, n'est plus ici valable.

En appelant x la distance d'une tranche cylindrique à l'axe, H le champ magnétique et σ la densité de courant en ce point, les équations classiques de l'électromagnétisme fournissent immédiatement

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -4\pi\sigma, \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{4\pi}{\rho}\frac{\partial H}{\partial t}.$$

L'intégration de la seconde équation s'effectue facilement grâce aux fonctions de Bessel la valeur de σ en chaque point s'en déduit aisément, ainsi que l'énergie totale W recueillie par unité de temps dans le cylindre de hauteur h. Cette énergie peut s'écrire

$$W = \frac{H_{\text{eff}}^2}{16\pi^2}\frac{\pi h d\rho}{\varepsilon}\,\frac{\left\{\sqrt{2}\left[\operatorname{ber}\left(\frac{d}{\varepsilon\sqrt{2}}\right)\operatorname{ber}'\left(\frac{d}{\varepsilon\sqrt{2}}\right) + \operatorname{bei}\left(\frac{d}{\varepsilon\sqrt{2}}\right)\operatorname{bei}'\left(\frac{d}{\varepsilon\sqrt{2}}\right)\right]\right\}}{\operatorname{ber}^2\left(\frac{d}{\varepsilon\sqrt{2}}\right) + \operatorname{bei}^2\left(\frac{d}{\varepsilon\sqrt{2}}\right)}, \quad (1)$$

H_{eff} désignant le champ efficace extérieur dans lequel se trouve placé le cylindre [1]. La dernière fraction est une fonction du rapport $\frac{d}{\varepsilon}$ que nous désignerons par $\Phi\left(\frac{d}{\varepsilon}\right)$; sa variation en fonction de $\frac{d}{\varepsilon}$

[1] Si le cylindre est placé dans un solénoïde long, comportant n_1 spires par centimètre et traversé par une intensité efficace I_{eff}, on a

$$H_{\text{eff}}^2 = 16\pi^2 n_1^2 I_{\text{eff}}^2.$$

est donnée par la figure 1; nulle pour $\frac{d}{\varepsilon} = 0$ elle tend vers 1 pour $\frac{d}{\varepsilon} = \infty$.

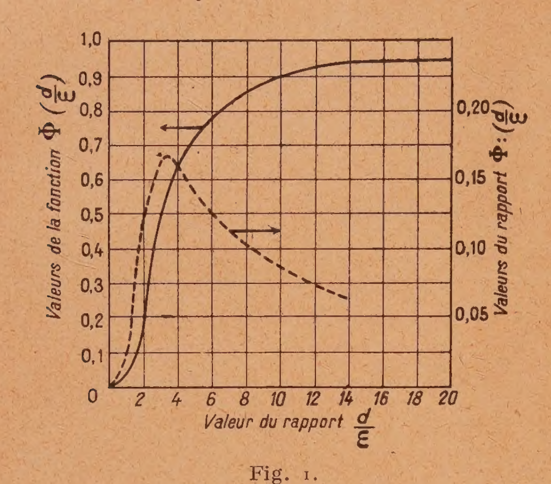


Fig. 1.

De façon générale on peut écrire

$$W = n_1^2 I_{\text{eff}}^2 \frac{\pi d h \rho}{\varepsilon} \Phi\left(\frac{d}{\varepsilon}\right) \qquad \text{avec} \quad \varepsilon = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\rho}{f}}. \qquad (2)$$

Nous allons nous proposer de tracer, pour un diamètre d et une fréquence f donnés, la variation de W, ou mieux de $\frac{W}{\pi d h n_1^2 I^2}$, en fonction de la résistivité ρ de la substance.

Nous avons déjà donné l'allure générale de cette variation dans des publications antérieures [2]; nous préciserons davantage ici les valeurs de W; l'étude portera également sur les fréquences élevées que les installations à lampes permettent d'atteindre aisément ($f = 10^7$).

Pour permettre une représentation des valeurs élevées de la résistivité, nous avons sur les figures 2, 3, 4 et 5 adopté pour ρ et pour W des coordonnées logarithmiques.

Faibles valeurs de la résistivité. — Pour les faibles valeurs de la résistivité, c'est-à-dire pour les corps très conducteurs, l'épaisseur de peau ε reste faible et la fonction $\Phi\left(\frac{d}{\varepsilon}\right)$ reste voisine de 1. Dans ces conditions la formule (2) peut s'écrire

$$\frac{W}{\pi d h (n_1 I)^2} = \frac{\rho}{\varepsilon} = 2\pi\sqrt{\rho f}. \qquad (2^{bis})$$

Pour une fréquence donnée, W varie comme $\sqrt{\rho}$; en d'autres termes les courbes sont des portions de droites de pente $\frac{1}{2}$. Comme les fréquences indiquées sur les courbes croissent successivement dans le rapport de 1 à 10, les droites précédentes se trouvent décalées, parallèlement à l'axe des y, d'une quantité égale à 0,5. Elles ne dépendent pas de la valeur de d et sont identiques sur les trois figures [3].

Position et grandeur du maximum d'énergie recueillie. — La formule (2), transformée, peut s'écrire

$$\frac{W}{\pi d h (n_1 I)^2} = \frac{\rho}{\varepsilon}\Phi\left(\frac{d}{\varepsilon}\right) = \frac{\rho d}{\varepsilon^2}\frac{\Phi\left(\frac{d}{\varepsilon}\right)}{\left(\frac{d}{\varepsilon}\right)} = 4\pi^2 d f \frac{\Phi\left(\frac{d}{\varepsilon}\right)}{\left(\frac{d}{\varepsilon}\right)}. \qquad (3)$$

Pour un diamètre et une fréquence donnés, W varie comme le rapport $\frac{\Phi\left(\frac{d}{\varepsilon}\right)}{\left(\frac{d}{\varepsilon}\right)}$. Les variations de ce rapport sont données en pointillé (graduation de droite) sur la figure 1. On y remarque en particulier que l'énergie maximum est atteinte pour une valeur de $\frac{d}{\varepsilon}$ égale à 3,5, c'est-à-dire pour une valeur de ρ donnée par la relation

$$\boxed{\rho_{\max} = 3{,}3\, d^2 f.} \qquad (4)$$

Si l'on remarque que la valeur maximum du rapport $\frac{\Phi\left(\frac{d}{\varepsilon}\right)}{\left(\frac{d}{\varepsilon}\right)}$ est égale à 0,17, cela entraîne, pour l'énergie maximum $W_{\max}$, l'expression suivante :

$$\boxed{\frac{W_{\max}}{\pi d h (n_1 I)^2} = 4\pi^2 . 0{,}17\, d f \simeq 7 d f.} \qquad (5)$$

On se rend aisément compte que, pour des fréquences croissant dans le rapport de 1 à 10, les valeurs de $\log \rho_{\max}$ croissent d'une unité, ainsi que celles de $\log W_{\max}$; les maxima se trouvent sur une même droite de pente 1. En outre, on peut remarquer que l'ordonnée du maximum reste inchangée si l'on modifie à la fois d et f de façon que leur produit reste inchangé.

Grandes valeurs des résistivités. — Pour les valeurs très élevées des résistivités, le rapport $\frac{d}{\varepsilon}$ est faible; le calcul montre alors que la dernière fraction de l'équation (1) que nous avons désignée

[2] G. Ribaud, *J. Phys.*, 1923, **4**, p. 188; P. Lebeau, *Fours électriques et chimie*, p. 359.

[3] Cela tient évidemment à ce que nous avons porté en ordonnées $\frac{W}{\pi d h}$, c'est-à-dire l'énergie rapportée à l'unité de surface extérieure. Les énergies absolues W sont, bien entendu, proportionnelles à d, du moins dans cette partie des courbes.

par $\Phi\left(\frac{d}{\varepsilon}\right)$ tend vers $\frac{1}{32}\left(\frac{d}{\varepsilon}\right)^3$; dès lors l'équation (3) nous donne

$$\frac{W}{\pi\, dh(n_1 I)^2} = \frac{\rho}{32\,\varepsilon}\left(\frac{d}{\varepsilon}\right)^3 = B\,\frac{d^3 f^2}{\rho}$$

(B constante numérique que nous n'explicitons pas). De cette formule il résulte que, pour les grandes résistivités, les courbes logarithmiques tendent vers des droites de pente -1 ([4])

Rappelons également que, si ε est grand par rapport au diamètre d du cylindre, la densité de courant, nulle sur l'axe du cylindre, varie proportionnellement à la distance à l'axe. Sa valeur à la surface du cylindre peut s'écrire

$$\sigma_s = n_1 I \frac{d}{2\,\varepsilon^2}, \qquad (6)$$

et le courant induit total a pour expression

$$i = n_1 h I \frac{d^2}{8\,\varepsilon^2}. \qquad (7)$$

Pratiquement ces expressions sont valables avec une approximation suffisante dès que l'on a dépassé le maximum, c'est-à-dire pour des valeurs de $\frac{d}{\varepsilon}$ inférieures à 3.

Fig. 3.

Conséquences pratiques. — Les figures 2, 3, 4, 5 donnent quantitativement les énergies recueillies, en fonction de la résistivité, pour divers diamètres

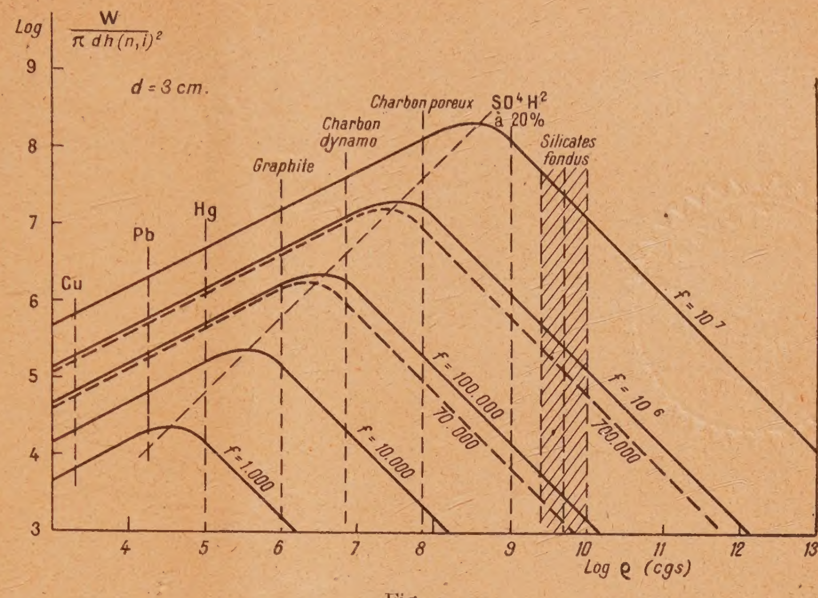


Fig. 2.

et diverses fréquences. Nous y avons figuré, en pointillé, les résistivités correspondant à quelques métaux; cuivre, plomb, mercure, au graphite et à une solution d'acide sulfurique à 20 pour 100 dans l'eau ($\rho = 10^9$); cette dernière résistivité est également celle des sels fondus courants.

Ces courbes appellent un certain nombre de remarques pratiques. On y voit en particulier la très nette *influence du diamètre* de la substance à chauffer : pour un diamètre de 3 cm et une fréquence de 10 000 (*fig.* 2), l'énergie recueillie est trois fois plus élevée dans le graphite que dans le mercure. De même un corps de résistivité 10^9 C. G. S. (solution à 20 pour 100 de SO_4H_2) et de diamètre 3 cm placé dans un champ de fréquence 10^6 recueille huit fois moins d'énergie que le cuivre; sous un diamètre 12 cm il en recueille dix fois plus. Dans un champ de fréquence 10^6 un corps de résistivité 10^{10} C. G. S., sous un diamètre 3 cm, recueille 100 fois moins d'énergie que le graphite, sous un diamètre de 12 cm il recueille une énergie égale.

L'influence de la fréquence apparaît également à première vue sur les courbes précédentes. Pour un

([4]) On remarquera en outre que ces droites sont identiques si l'on change à la fois d et f de façon que le produit $d^3 f^2$ reste inchangé.

diamètre donné, 3 cm par exemple, l'énergie recueillie dans le graphite est extrêmement faible à 1000 p;

Fig. 4.

avec une fréquence 10 000 cette énergie est 100 fois plus élevée; à 100 000 p elle l'est 1000 fois plus.

La nécessité d'employer des fréquences élevées apparaît encore davantage lorsqu'il s'agit de corps de résistivités supérieures à celles du graphite. Pour une résistivité égale à 10^9 C. G. S. et un diamètre 3 cm, on n'aura une énergie appréciable qu'à partir de fréquences de l'ordre de 10^6.

Nous allons d'ailleurs envisager les choses sous un angle un peu différent en faisant appel à la notion de rendement électrique du chauffage.

Valeurs des rendements de chauffage. — En pratique le chauffage d'une substance s'effectue en la plaçant dans un solénoïde à spires de cuivre que nous supposerons jointives et d'épaisseur nettement supérieure à l'épaisseur de peau dans ce métal. L'énergie W_e dissipée dans ce solénoïde est donnée par l'expression (2 *bis*) dans laquelle d et h représentent le diamètre et la hauteur du solénoïde.

En d'autres termes, si le solénoïde a même diamètre et même hauteur que la substance, W_e est représentée par le point relatif au cuivre sur les figures 2, 3 et 4. Si le solénoïde a des dimensions D et H supérieures à celles d et h, de la substance, W_e sera représentée par l'ordonnée du point figuratif précédent multipliée par le rapport $\frac{DH}{dh}$. Si l'on rapproche cette valeur W_e de l'énergie W_c recueillie dans la substance, laquelle est fournie par l'ordonnée correspondant à la résistivité de la substance, on en déduira aisément le rendement électrique du chauffage.

Par exemple un cylindre de graphite de diamètre $d = 3$ cm, pour une fréquence $f = 10\,000$ (*fig.* 2), a une ordonnée égale à 5; le cuivre a pour ordonnée 4,3; si le solénoïde avait mêmes dimensions que le graphite, le rapport $\frac{W_c}{W_e}$ des énergies dissipées dans le graphite et dans l'enroulement ([5]) aurait pour valeur :

$$10^{5,0-4,3} = 10^{0,7},$$

c'est-à-dire 5. En fait ce nombre devra être multiplié par le rapport $\frac{dh}{DH}$; admettons ce rapport égal à 0,5,

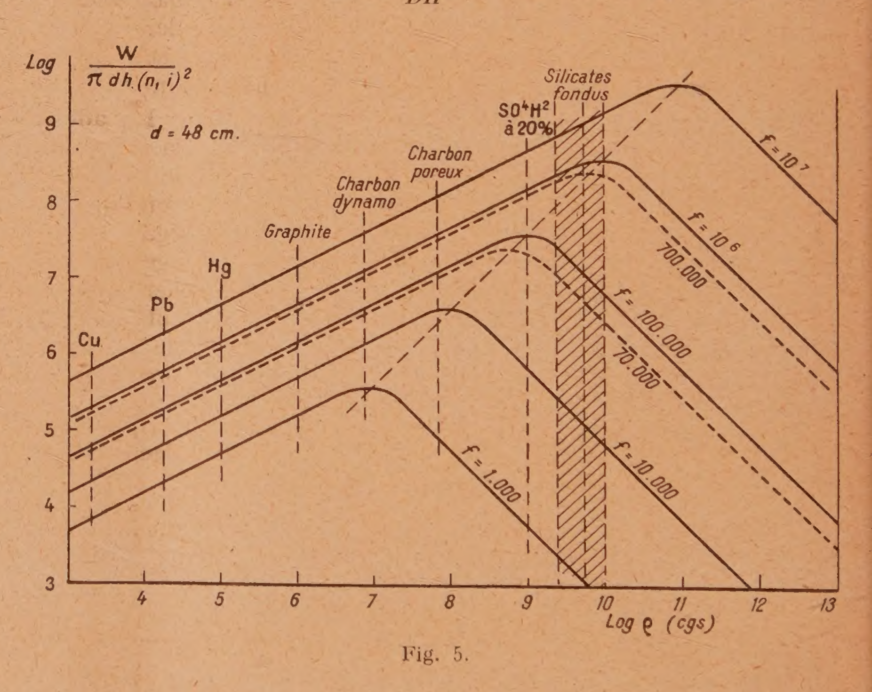


Fig. 5.

cela entraîne $\frac{W_c}{W_e} = 2{,}5$. Le rendement du chauffage

$$\eta = \frac{W_c}{W_c + W_e}$$

([5]) Dans la suite ce rapport sera appelé « rapport théorique ».

a dès lors pour valeur

$$\frac{2,5}{2,5+1}=0,7.$$

Il paraît également intéressant de rechercher jusqu'où s'étendent les possibilités de chauffage par induction de substances de haute résistivité, par exemple les sels fondus (silicates, ...), dont les résistivités sont de l'ordre de 1 à quelques ohms par centimètre; nous admettrons par exemple $\rho = 10^9$ C. G. S. Pour des diamètres de l'ordre de 3 cm, on n'aura un rendement acceptable qu'à la condition d'adopter une fréquence de l'ordre de 10^6 (rapport théorique, 4). Pour un diamètre de 12 cm, la fréquence 100 000 suffira, elle fournira un rapport théorique égal à 10; une résistivité égale à 3.10^9 donnerait encore, à la fréquence 100 000 un rapport égal à 3. Avec des diamètres de l'ordre de 50 cm la fréquence 10 000 donne, pour ces mêmes résistivités, des rendements très élevés (rapports théoriques 15 et 100).

Si l'on se limite à des diamètres de 12 cm environ, des fréquences de l'ordre de 10^6 permettent de chauffer, avec d'excellents rendements électriques des substances dont les résistivités atteignent 10^{11} C. G. S.

Il nous paraît superflu de multiplier les exemples; nous avons tenu à montrer qu'au moyen des graphiques précédents on est en mesure de chiffrer, par avance, le comportement d'une substance de résistivité connue dans un four de dimensions données, alimenté avec une fréquence déterminée.

En réalité, dans les calculs précédents, l'on a supposé que le cylindre chauffé a une grande hauteur par rapport au diamètre. S'il n'en est pas ainsi, il conviendrait d'introduire le « facteur de forme » ([6]); en fait les conclusions précédentes ne se trouveraient pas sensiblement modifiées.

Chauffage par induction d'un gaz sous pression réduite. — Sous une pression convenable, en général comprise entre 0,05 et 0,5 mm de mercure, un gaz placé dans un champ magnétique de haute fréquence s'ionise, devient conducteur et peut s'échauffer de façon notable. Par exemple, dans un tube de diamètre 6 cm, de hauteur 12 cm, rempli de néon sous une pression de 0,5 mm de mercure, et placé dans un solénoïde comportant deux spires par centimètre parcouru par un courant de fréquence 70 000 et d'intensité 60 A, la puissance recueillie, mesurée calorimétriquement, a été trouvée égale à 3,2 kW. Il s'agit là de puissances très notables, nettement plus élevées que celles dissipées dans un métal.

Les courbes tracées plus haut vont nous permettre de préciser la valeur de la densité de courant réalisée dans le gaz et de chiffrer la résistivité du gaz pour une telle densité de courant.

Des mesures comparatives effectuées sur un cylindre de mêmes dimensions, en graphite, ont fourni, pour une intensité 42 A, une puissance dissipée égale à 4,0 kW. Ces chiffres montrent, qu'à intensité égale dans le solénoïde, la puissance dissipée dans le néon est 2,5 fois plus faible que dans le graphite. Cela conduit à une résistivité du néon égale à environ 10^8 C. G. S. ([7]), confirmée d'ailleurs par un recoupement fourni par un cylindre de charbon poreux de résistivité 7.10^7 C. G. S. Il s'agit en fait d'une résistivité moyenne, car les gaz ionisés ont une résistivité qui dépend de la densité de courant et nous avons vu plus haut que cette densité, nulle au centre, varie à peu près linéairement jusqu'en surface.

En admettant que cette résistivité moyenne est la même tout le long d'un rayon, comme ce serait le cas pour un conducteur habituel, la formule (7) conduit à une intensité totale induite dans le gaz égale à 180 A, c'est-à-dire à une densité moyenne égale à 5 A : cm². Il s'agit là d'une densité de courant nettement supérieure à celles rencontrées dans les tubes a décharge utilisés pour l'éclairage; une étude de la luminosité correspondante fera l'objet d'une prochaine publication.

([6]) G. Ribaud et M. Leblanc, *C. R. Acad. Sc.*, 1945, **220**, p. 732.

([7]) Point désigné par Ne sur la courbe $f = 70\,000$ de la figure 3.

Manuscrit reçu le 4 février 1947.

TUBES A RAYONS X A FOYER LINÉAIRE DE GRANDE BRILLANCE [1]

Par Maurice POITTEVIN.
Laboratoire de Chimie physique de la Faculté des Sciences de Paris.

Sommaire. — Il est possible d'obtenir un foyer linéaire très fin avec un filament courbe placé dans une pièce de concentration ayant la forme d'une portion de cylindre de même rayon de courbure et une anticathode plane située à une distance convenable.

Les trajectoires électroniques sont alors des courbes très tendues convergeant vers une ligne perpendiculaire au plan contenant le filament, l'épaisseur de cette ligne étant théoriquement nulle et pratiquement inférieure à 1/10e de millimètre.

Ce foyer supporte des brillances très élevées et donne des résultats particulièrement intéressants en cristallographie.

Principe. — Pour obtenir un foyer linéaire, le moyen le plus simple serait d'employer une cathode cylindrique creuse à surface intérieure émettrice et une anticathode filiforme centrée dans cette cathode.

Les lignes de force seraient alors des droites perpendiculaires à l'axe commun à la cathode et à l'anticathode et les trajectoires électroniques, coïncidant avec les lignes de force, formeraient sur cet axe un foyer linéaire.

Cette disposition ne présente qu'un intérêt théorique, car l'on ne peut pas construire d'électrodes pratiquement utilisables de cette forme.

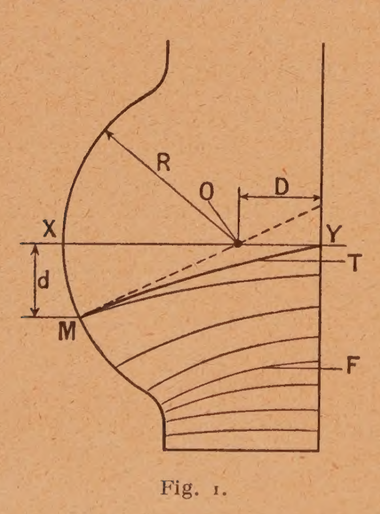


Fig. 1.

Mais si l'on donne à ces électrodes les formes de la figure 1, il est possible d'obtenir des trajectoires électroniques presque aussi simples et une concentration aussi rigoureuse, du moins en première approximation.

En effet, si la cathode est une portion de cylindre de rayon R et de centre O, et si l'anticathode est un plan situé à une distance D du centre O, les lignes de force F ont une forme complexe au voisinage des bords de la cathode mais, près de l'axe de symétrie XY elles sont assez voisines d'arcs de circonférence dont la courbure moyenne est proportionnelle à la distance d séparant leur point de départ M du point X situé dans le plan de symétrie.

Les électrons émis par la cathode suivent des trajectoires T qui coïncident d'abord avec les lignes de force, puis s'en écartent progressivement, puisqu'en tout point, la courbure C_T de ces trajectoires est plus faible que celle du champ.

Cette courbure C_T a pour valeur

$$C_T = \frac{K_1 H \sin\alpha}{v^2},$$

où

H est le champ électrique;
v, la vitesse de l'électron;
α, l'angle de la vitesse et du champ.

Pour un point M de la cathode choisi arbitrairement à une distance d de X, il existe une valeur particulière de D pour laquelle les électrons partant de ce point rencontrent l'anticathode au point Y, situé dans le plan de symétrie.

Pour que le foyer soit linéaire au sens géométrique du terme, c'est-à-dire pour que sa largeur soit nulle, il faut que, pour cette distance D, tous les électrons émis entre X et M convergent au point Y.

Il suffit, pour cela, que la déviation de chaque trajectoire par rapport à la tangente à son origine soit proportionnelle à d, c'est-à-dire que

$$\int_{D+R}^{0} \frac{K_1 H \sin\alpha}{v^2} L \,\mathrm{d}L = K_2 d,$$

où L est la distance à parcourir pour atteindre l'anticathode.

Cette condition est satisfaite si d est assez petit, c'est-à-dire si la partie émettrice de la cathode est assez voisine du plan de symétrie.

Dans le sens perpendiculaire à celui de la figure 1, si on limite la surface émettrice à une partie assez réduite de la hauteur de la cathode, la dimension du foyer est égale à celle de cette surface émettrice.

Le foyer est donc linéaire, mais, contrairement

[1] *C. R. Acad. Sc.*, 9 juin 1947.

aux tubes habituels, sa plus grande dimension est *perpendiculaire* au plan contenant la plus grande dimension de la partie émettrice de la cathode.

Construction. — Pour construire une cathode du principe que j'ai décrit, on peut faire une gorge étroite dans une pièce semi-cylindrique et placer, dans cette gorge, un filament ayant même centre de courbure que cette pièce (*fig.* 2).

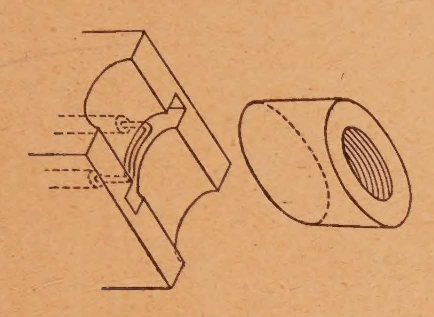


Fig. 2.

On fixe le filament sur deux tiges de diamètre et de longueur tels qu'elles refroidissent suffisamment ses extrémités pour que, seule, sa partie centrale correctement incurvée puisse émettre des électrons.

Pour déterminer la distance à laquelle on doit placer l'anticathode pour obtenir le foyer de largeur minimum, on pourrait tracer les lignes de force et les trajectoires d'électrons par une méthode graphique.

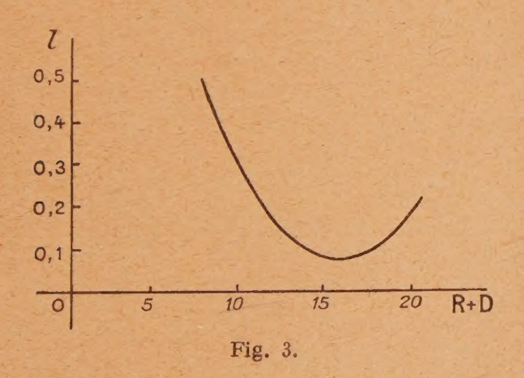


Fig. 3.

Mais ce tracé ne serait précis que dans le cas théorique de la figure 1. Or, la forme de la figure 2 s'en éloigne sensiblement. Le tracé ne pourrait donc être qu'approximatif et, par conséquent, sans intérêt pour la définition précise d'un foyer très fin.

C'est donc par l'expérience qu'il faut déterminer cette distance. Dans ce but, on peut monter l'anticathode sur un support fileté et le déplacer en communiquant au tube des accélérations angulaires convenables.

La figure 3 représente la variation de largeur du foyer en fonction de la distance entre électrodes pour un tube dont la cathode a un rayon de courbure $R = 10$ mm. Le foyer minimum est obtenu pour $D = 6$ mm.

Pour cette distance, la largeur du foyer est si petite qu'elle est difficile à mesurer par les moyens habituels. J'ai obtenu successivement, dans des conditions différentes : 0,04, 0,06 et 0,1 mm.

La longueur de ce foyer est de 2,5 mm; les électrons sont donc légèrement divergents perpendiculairement au plan contenant le filament.

Les dimensions du foyer sont indépendantes de la valeur et de la forme de la tension appliquée au tube puisque la focalisation est obtenue sans tension ni champ auxiliaire.

Le foyer de $2,5 \times 0,1$ mm supporte, sur une anticathode de tungstène mince, une puissance de 300 W, soit une brillance de 1200 W : mm² de surface réelle (²) et de 30 kW : mm² de surface apparente lorsque ses dimensions apparentes sont celles d'un carré de 0,1 mm de côté.

Applications. — C'est en Cristallographie que ce foyer présente le plus d'intérêt.

Grâce à l'amabilité de Mlle Y. Cauchois, j'ai pu obtenir dans son laboratoire des diagrammes de Laue de très grande finesse, dans des temps très courts, avec une faible dépense d'énergie et sans collimateur, avec un simple diaphragme de 0,2 mm de diamètre.

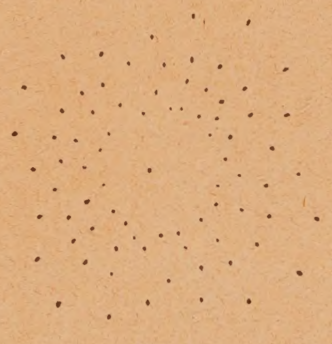


Fig. 4.

La figure 4 représente un diagramme de sel gemme de 1 mm d'épaisseur obtenu en 10 minutes à 80 kV et 3 mA.

Les dimensions des taches de diffraction, dans le plan de réflexion sélective sont relativement grandes en raison de la grande épaisseur du cristal.

Lorsque les cristaux sont assez minces, les taches

(²) Des brillances de cet ordre ont été prévues théoriquement par M. S. Goldsztaub (*C. R. Acad. Sc.*, 17 février 1947).

de diffraction sont des ellipses de 0,1 mm de largeur dans le plan de réflexion sélective et de quelques dixièmes de millimètre perpendiculairement à ce plan.



Fig. 5.

La figure 5 représente un diagramme de cristal d'alliage ferreux de 1/10e de millimètre d'épaisseur, obtenu en 10 minutes à 80 kV et 3 mA. L'orientation de ce cristal était quelconque, les dimensions des taches de diffraction ayant été seules recherchées.

Comparaison aux foyers circulaires. — Pour que la forme des taches de diffraction puisse être facilement interprétée, le foyer doit avoir des dimensions apparentes sensiblement égales dans deux directions perpendiculaires. Nous supposerons que, dans le cas d'un foyer circulaire, le faisceau de rayons X utilisés est sensiblement perpendiculaire à l'anticathode et que, dans le cas du foyer linéaire, ce faisceau a une inclinaison telle que le foyer paraisse carré.

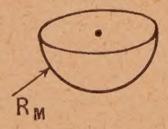


Fig. 6.

La loi de répartition de la température dans l'anticathode est relativement simple dans le cas d'un foyer circulaire, où l'on peut admettre (3), avec une approximation suffisante, qu'elle est donnée par la formule

$$t_r - t_R = KW\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right), \qquad (1)$$

où W est la puissance appliquée au tube t_r et t_R les températures aux rayons r et R d'une anticathode hémisphérique de rayon extérieur R_M (*fig.* 6).

La courbe de la figure 7 représente $t_r - t_R$ en fonction de r pour $R = 10$ mm et $r_0 = 0{,}06$ mm, c'est-à-dire pour un foyer de diamètre égal à la dimension apparente moyenne du foyer linéaire de projection carrée de 0,1 . 0,1 auquel nous allons le comparer.

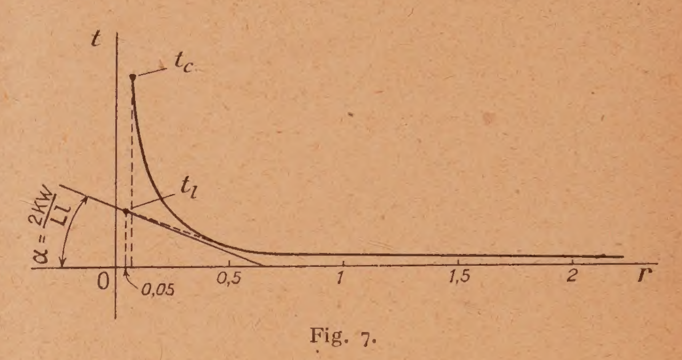


Fig. 7.

Cette courbe est une hyperbole équilatère très légèrement décalée $\left(\text{de } \frac{KW}{R}\right.$, toujours très petit devant $\left.t_r - t_R\right)$.

On voit sur cette courbe que la température varie extrêmement vite au voisinage du foyer. Par contre, elle varie très lentement au voisinage de R_M. La température du foyer serait donc sensiblement la

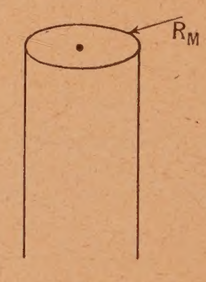


Fig. 8.

même si l'anticathode avait la forme de la figure 8 au lieu de celle de la figure 6, ce qui justifie l'hypothèse simplificatrice que nous avons faite en admettant la formule (1).

La loi de répartition de la température dans le cas d'un foyer linéaire est plus complexe. Pour un foyer dont le rapport $\left(\frac{L}{l}\right)$ de sa longueur à sa largeur est assez grand et à une distance de ce foyer restant petite par rapport à L, cette loi est donnée par la formule

$$t_r - t_R = \frac{KW}{L} \log\frac{R}{r}. \qquad (2)$$

Lorsque r devient grand par rapport à L, la loi de répartition redevient celle de la formule (1).

Tout calcul est impossible dans la zone de transition entre les formules (1) et (2), mais on peut, cependant, tracer approximativement la courbe de

(3) S. Goldsztaub, *C. R. Acad. Sc.*, 17 février 1947.

température car elle est définie par la formule (1) dans sa plus grande partie et sa tangente à l'origine est donnée par la dérivée de (2) dans laquelle on donne à r la valeur $\frac{1}{2}$.

Il suffit donc de prolonger la courbe de la figure 7 vers l'axe des températures de manière qu'elle coupe la ligne verticale d'abscisse 0,05 avec l'angle $-\frac{2KW}{Ll}$.

Le rapport des ordonnées $\frac{t_c}{t_l}$ donne le rapport des puissances applicables respectivement à des foyers linéaires de dimensions $L.l$ et circulaire de diamètre 1,2 l, pour une même température.

Ce rapport a pour valeur $\frac{t_c}{t_l} = 3{,}3$.

Le rapport des brillances apparentes de ces mêmes foyers est

$$\frac{t_c}{t_l}\,\frac{\pi 1{,}2^2}{4} = 3{,}7.$$

Le foyer de projection carrée de 0,1.0,1 a donc une brillance égale à 3,7 fois celle du foyer circulaire équivalent de 0,12 mm de diamètre, en supposant que ce dernier puisse être utilisé dans une direction permettant de le voir sous un angle solide à peu près symétrique.

Pour terminer, je tiens à remercier très vivement Mlle Y. Cauchois, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Paris, de m'avoir permis de faire des expériences dans son Laboratoire et utilement éclairé de ses conseils.

Je remercie également M. Varay et ses collaborateurs de la Société Tubix qui ont bien voulu construire les tubes nécessaires aux expériences.

Manuscrit reçu le 17 juin 1947.

LA TUYÈRE DE LAVAL NON ISENTROPIQUE A GAZ PARFAIT

Par M. Jean VILLEY,
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris.

Sommaire. — Les équations aux dérivées logarithmiques de l'écoulement linéaire non isentropique des gaz parfaits permettent d'étudier, au cours de l'amorçage de la tuyère de Laval, les déplacements des sections où u, v, T et p passent par leur maximum ou leur minimum. Lorsque la vitesse d'écoulement augmente, ces quatre sections viennent se confondre en une seule, qui devient la section sonique.

Cette section sonique n'est située au col que si l'apport de chaleur q et l'énergie décoordonnée w satisfont la relation $\frac{q}{w} = -\frac{\gamma}{\gamma - 1}$. Cette condition est satisfaite en particulier par l'isentropie adiabatique ($q = w = 0$), mais ne l'est pas dans le cas de l'isentropie par compensation ($q = -w$).

1. **La tuyère isentropique.** — La théorie élémentaire classique de la tuyère de Laval arrive à des résultats fort simples en supposant l'écoulement non seulement permanent et par tranches homogènes, mais de plus isentropique. Plus précisément elle le suppose simultanément isentropique et adiabatique, cette double condition excluant le cas de l'isentropie réalisée par soustraction d'une quantité de chaleur égale à la quantité d'énergie cinétique décoordonnée.

En effet, l'absence de décoordination est exigée par l'équation

$$u\,\mathrm{d}u = -v\,\mathrm{d}p \tag{1}$$

par laquelle on exprime que l'augmentation d'énergie cinétique *orientée* est égale au travail des forces de pression. Combinée avec l'équation de continuité $u.s.\rho = \text{const.}$, ou

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} + \frac{\mathrm{d}s}{s} + \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = 0, \tag{2}$$

elle suffit à donner l'équation fondamentale

$$\frac{\mathrm{d}u}{u}\left(u^2 - \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\right) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\,\frac{\mathrm{d}s}{s}, \tag{3}$$

d'où l'on conclut que, au col ($\mathrm{d}s = 0$), on a, soit $\mathrm{d}u = 0$, c'est-à-dire le maximum de vitesse du régime d'amorçage où la vitesse est encore partout subsonique, soit $u^2 = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}$ si $\mathrm{d}u \neq 0$. Ce dernier cas est celui du régime de Laval : au col la vitesse d'écoulement u devient supérieure à $\sqrt{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}}$.

Ce résultat n'exige nullement l'adiabaticité; mais, pour que $\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ soit la célérité du son a, il faut que l'écoulement soit isentropique; et, puisque nous l'avons supposé sans décoordinations, il faut qu'il soit aussi adiabatique. S'il n'est pas adiabatique, tout en restant sans décoordinations, la vitesse au col n'est pas la vitesse sonique; autrement dit la vitesse sonique est atteinte dans une section qui n'est pas située au col.

2. La tuyère non isentropique. — Il est à noter que le raisonnement très simple par lequel on est conduit à prévoir l'établissement d'une section sonique stable n'exige ni l'adiabaticité, ni l'absence de décoordinations. On suppose que, l'état étant maintenu invariable dans le réservoir d'amont, on réalise dans le réservoir d'aval des pressions p_5 inférieures à la pression d'amont p_0, avec des différences $(p_0 - p_5)$ de plus en plus grandes. On obtiendra ainsi des vitesses d'écoulement de plus en plus rapides, et, pour une valeur convenable de $(p_0 - p_5)$ la vitesse deviendra sonique dans une certaine section s_1 de la tuyère. A partir de ce moment, aucune perturbation mécanique ne pouvant plus traverser cette section s_1 en remontant l'écoulement, de nouveaux abaissements de p_5 n'apporteront plus aucune modification à la partie de l'écoulement située en amont de s_1, qui restera dès lors invariable, avec la vitesse sonique en s_1.

Si l'on ne se donne pas la peine d'analyser avec précision les phénomènes, on sera porté à faire implicitement le raisonnement suivant : c'est dans la section minima (col) que la vitesse est maxima au cours des écoulements partout subsoniques; donc c'est là qu'elle deviendra sonique; donc la section sonique s_1 s'établit au col.

Il y a là deux erreurs superposées. D'abord le maximum de la vitesse u des régimes partout subsoniques n'est situé au col ($ds = 0$) que dans des cas particuliers exceptionnels. Ensuite l'apparition de la vitesse sonique ne se localise pas à l'endroit où la vitesse u est maxima, mais à l'endroit où $\frac{u}{a}$ atteint d'abord la valeur 1, par conséquent à l'endroit où $\frac{u}{a}$ est maximum. La condition correspondante est donc

$$a\,du - u\,da = 0, \qquad (4)$$

où $\frac{du}{da} = \frac{u}{a}$; elle ne coïncide avec le maximum de vitesse ($du = 0$) que si celui-ci est confondu avec le minimum de célérité du son ($da = 0$).

Considérons par exemple le cas particulier des gaz parfaits. On a alors $a^2 = \gamma RT$. Le minimum de a correspond donc au minimum de la température T. Mais l'équation de l'enthalpie, écrite pour un écoulement dans une canalisation immobile

$$u\,du + C\,dT = \delta q \qquad (5)$$

montre que les conditions $du = 0$ et $dT = 0$ ne sont simultanément satisfaites que si $\delta q = 0$, c'est-à-dire si l'écoulement est adiabatique.

Pour étudier l'écoulement non isentropique, il faut supposer connue la quantité de chaleur δq reçue (algébriquement) par l'unité de masse du gaz le long d'un parcours élémentaire dx et la quantité d'énergie cinétique δw qui s'y décoordonne simultanément.

Ceci appelle une observation importante. La décoordination δw est essentiellement liée à des gradients transversaux de la vitesse u. Pareillement l'échange de chaleur δq exige, du moins lorsqu'il est réalisée par conduction avec les parois, des gradients transversaux de la température T. C'est dire que les deux mécanismes normaux de variation de l'entropie sont incompatibles avec l'hypothèse de l'écoulement par tranches homogènes normales à l'axe.

L'étude exacte de l'écoulement non isentropique exige donc d'introduire, au lieu de la seule abscisse curviligne x comptée le long de l'axe de la canalisation, les trois coordonnées d'espace, réductibles à deux dans le cas d'une canalisation de révolution. Il faut envisager, dans l'écoulement global, des filets élémentaires qui glissent longitudinalement les uns le long des autres, pour étudier séparément leurs évolutions. Celles-ci se compliquent du fait que les échanges de matière réalisés entre eux, même en l'absence de turbulences, par l'agitation moléculaire, comportent des échanges d'énergie cinétique thermique et de quantité de mouvement. Les premiers donnent, même dans l'hypothèse de l'adiabaticité globale de l'écoulement, des transports de chaleur de filet à filet si leurs évolutions différentes ont amené ceux-ci à des températures différentes en des points voisins; la condition d'adiabaticité n'est alors pas remplie pour chaque filet étudié séparément. Quant aux échanges de quantité de mouvement, on a l'habitude de les traduire en y substituant un schéma considéré comme mécaniquement équivalent : faisant abstraction des échanges de matière qui se produisent à travers sa surface latérale, on assimile chaque tronçon de filet à un système matériel conservatif et l'on imagine des forces fictives de frottement s'exerçant tangentiellement entre filets contigus et produisant dans le filet considéré les apports (algébriques) de quantité de mouvement qui sont en réalité produits par les échanges de matière.

Alors que les forces réelles de frottement exercées par la paroi immobile de la canalisation sur un écoulement supposé par tranches homogènes ne lui fournissent aucun travail, on assimile ainsi les filets voisins du filet étudié à des parois animées

elles-mêmes d'un mouvement de glissement, et capables par conséquent de lui fournir du travail.

Au total l'étude correcte apparaît très complexe.

3. **La notion d'écoulement linéaire non isentropique.** — On peut toutefois en faire une première approximation beaucoup plus simple, et d'ailleurs un peu contradictoire en soi. Elle consiste à tenir compte des apports δq et δw d'énergie cinétique moléculaire, tout en négligeant les gradients transversaux de température et de vitesse qui en sont la condition nécessaire [1]. On assimilera alors l'écoulement à un écoulement linéaire pour calculer l'évolution en fonction de la seule abscisse curviligne x, c'est-à-dire en considérant les tranches orthogonales comme pratiquement homogènes.

Une telle contradiction théorique ne suffit pas à faire rejeter *a priori* une approximation susceptible de rendre des services. Il peut arriver en effet que des phénomènes, dont le rôle est essentiel parce qu'ils en provoquent d'autres considérés comme non négligeables, n'apportent pas directement dans les calculs de corrections du même ordre de grandeur. On pourra alors les négliger dans les calculs, sans négliger leurs conséquences. Il faudra d'ailleurs rester prudent dans l'utilisation des résultats ainsi obtenus, contrôler leur légitimité, et n'y voir qu'une première approximation.

J'ai déjà signalé les services considérables que peut rendre, dans l'étude des écoulements de gaz parfaits, cette approximation, théoriquement contradictoire, de l'écoulement linéaire non isentropique [2].

On aboutit alors facilement, en posant

$$\xi = \frac{u^2}{a^2}, \qquad \mathrm{d}u = u'\,\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}v = v'\,\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}T = T'\,\mathrm{d}x,$$
$$\mathrm{d}p = p'\,\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}s = s'\,\mathrm{d}x,$$
$$\delta q = q(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \delta w = w(x)\,\mathrm{d}x,$$

et en divisant partout par $\mathrm{d}x$, aux équations suivantes :

$$\frac{u'}{u} = \frac{1}{1-\xi}\left[-\frac{s'}{s} + \xi(\gamma-1)\frac{q}{u^2} + \xi\gamma\frac{w}{u^2}\right], \tag{6}$$

$$\frac{v'}{v} = \frac{\xi}{1-\xi}\left[-\frac{s'}{s} + (\gamma-1)\frac{q}{u^2} + \gamma\frac{w}{u^2}\right], \tag{7}$$

$$\frac{T'}{T} = \xi\frac{\gamma-1}{1-\xi}\left[\frac{s'}{s} + (1-\xi\gamma)\frac{q}{u^2} - \xi\gamma\frac{w}{u^2}\right], \tag{8}$$

$$\frac{p'}{p} = \xi\frac{\gamma}{1-\xi}\left[\frac{s'}{s} - \xi(\gamma-1)\frac{q}{u^2} - \big(1+\xi(\gamma-1)\big)\frac{w}{u^2}\right]. \tag{9}$$

4. **Les régimes subsoniques d'amorçage.** — On peut d'abord les utiliser pour étudier, dans la tuyère de Laval, les régimes préparatoires correspondant aux valeurs de $(p_0 - p_5)$ assez faibles pour que l'écoulement reste partout subsonique $[(1-\xi) > 0]$.

Alors, dans le cas de l'isentropie adiabatique ($q = w = 0$), on avait simultanément

$$u' = v' = T' = p' = 0 \qquad \text{pour} \quad s' = 0;$$

c'est-à-dire que les maxima de la vitesse u et du volume spécifique v et les minima de la température T et de la pression p étaient confondus et situés au col. Il n'en est plus de même dans les écoulements non isentropiques.

En effet, chaque section de la tuyère est caractérisée par la valeur de $\frac{s'}{s}$ que son profil y réalise, et la position du maximum ou minimum de chacune des quatre fonctions est définie par la valeur de $\frac{s'}{s}$ qui annule, dans les équations (6 à 9), le second membre correspondant.

On peut alors chercher quelle relation il faut imposer entre $q(x)$ et $w(x)$, soit $q = kw$, pour faire coïncider ces divers maxima ou minima, c'est-à-dire pour rendre égales entre elles les valeurs de $\frac{s'}{s}$ qui annulent ces seconds membres.

Les équations qui traduiraient la coïncidence des quatre valeurs stationnaires donnent, en divisant partout par $\frac{w}{u^2}$,

$$\left.\begin{aligned} \underset{u}{\xi(\gamma-1)k + \xi\gamma} &= \underset{v}{(\gamma-1)k + \gamma} \\ &= \underset{T}{(\xi\gamma-1)k + \xi\gamma} \\ &= \underset{p}{\xi(\gamma-1)k + 1 + \xi(\gamma-1)}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

soit un système de trois équations linéaires, qui n'admet pas en général de solution pour l'inconnue k.

On peut par contre très facilement étudier les conditions pour que coïncident les extrema de deux des quatre fonctions.

5. **Coïncidence des maxima de la vitesse et du volume spécifique.** — Par exemple, pour faire coïncider les maxima de la vitesse u et du volume spécifique v, il faut

$$\xi(\gamma-1)k + \xi\gamma = (\gamma-1)k + \gamma \tag{11}$$

ou

$$(1-\xi)[(\gamma-1)k + \gamma] = 0,$$

d'où, puisque $\xi < 1$,

$$k = -\frac{\gamma}{\gamma-1}.$$

La coïncidence ainsi réalisée est localisée au col, puisque l'on a

$$\frac{s'}{s} = [(\gamma-1)k + \gamma]\frac{w}{u^2} = 0.$$

(1) Des échanges de chaleur sans gradient de température sont toutefois possibles par rayonnement.

(2) *C. R. Acad. Sc.*, 1935, **201**, p. 1417; 1942, **214**, p. 477 et 900; *Journ. de Phys.*, avril et septembre 1942.

Elle y exige un enlèvement de chaleur égal, pour les gaz diatomiques, à $\frac{14}{4} = 3{,}5$ fois la quantité d'énergie cinétique décoordonnée.

Dans ce cas, le minimum de la pression p, caractérisé par

$$\frac{s'}{s} = [\xi(\gamma - 1)k + 1 + \xi(\gamma - 1)]\frac{w}{u^2},$$

est localisé, si l'on suppose que la valeur du rapport k y reste la même, là où

$$\frac{s'}{s} = [-\xi\gamma + 1 + \xi(\gamma - 1)]\frac{w}{u^2} = (1 - \xi)\frac{w}{u^2}.$$

Cette valeur positive le situe en aval du col, dont il se rapproche progressivement à mesure que ξ augmente pour tendre vers 1.

Le minimum de la température T, caractérisé par

$$\frac{s'}{s} = [(\xi\gamma - 1)k + \xi\gamma]\frac{w}{u^2},$$

sera localisé de même là où

$$\frac{s'}{s} = \left[-(\xi\gamma - 1)\frac{\gamma}{\gamma - 1} + \xi\gamma\right]\frac{w}{u^2}$$
$$= \frac{\gamma}{\gamma - 1}[\xi(\gamma - 1) - (\xi\gamma - 1)]\frac{w}{u^2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}(1 - \xi)\frac{w}{u^2}.$$

Cette valeur positive, plus grande que la précédente, le situe plus loin en aval que le minimum de la pression; mais il tend en même temps que lui vers le col lorsque ξ tend vers 1.

6. **Coïncidence des extrema de la vitesse et de la température.** — Pour faire coïncider le maximum de u avec le minimum de T, il faut

$$\xi(\gamma - 1)k + \xi\gamma = (\xi\gamma - 1)k + \xi\gamma \tag{12}$$

ou

$$(1 - \xi)k = 0, \qquad \text{d'où} \quad k = 0,$$

c'est-à-dire qu'il faut que l'écoulement soit adiabatique. Ce résultat était facile à prévoir, car l'équation de l'enthalpie se réduit alors à

$$u^2 + 2CT = \text{const.} \qquad \text{ou} \qquad 2uu' + 2CT' = 0$$

qui donne

$$T' = 0 \quad \text{pour} \quad u' = 0.$$

La coïncidence ainsi réalisée est localisée en

$$\frac{s'}{s} = \xi\gamma\frac{w}{u^2},$$

valeur positive qui la situe en aval du col. Elle s'éloigne de celui-ci à mesure que ξ augmente, du moins si cette augmentation n'est pas compensée par une diminution de $\frac{w}{u^2}$.

Le maximum du volume spécifique v correspond alors à $\frac{s'}{s} = \gamma\frac{w}{u^2}$, valeur positive plus grande que la précédente, qui le localise plus loin en aval. Il reste dans cette position invariable où l'extremum commun de u et T vient le rejoindre lorsque ξ tend vers 1.

Le minimum de p est caractérisé par

$$\frac{s'}{s} = [1 + \xi(\gamma - 1)]\frac{w}{u^2} = [\xi\gamma + (1 - \xi)]\frac{w}{u^2},$$

valeur plus grande, elle aussi, que $\xi\gamma\frac{w}{u^2}$, mais plus petite que $\gamma\frac{w}{u^2}$, puisque $\xi < 1$; c'est-à-dire qu'il est situé entre le minimum de T et le maximum de v.

7. **Coïncidence des extrema de la vitesse et de la pression.** — Pour faire enfin coïncider le maximum de u avec le minimum de p, il faut

$$\xi(\gamma - 1)k + \xi\gamma = \xi(\gamma - 1)k + 1 + \xi(\gamma - 1), \tag{13}$$

condition qui semble irréalisable, puisqu'elle donne $0 = 1 - \xi$. Mais on peut l'écrire, en divisant partout par k avant de faire disparaître les termes égaux présents dans les deux membres, $0 = \frac{1 - \xi}{k}$; elle sera donc réalisée si k est infiniment grand. Cela veut dire que w est nul, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de décoordination, autrement dit que les frottements des parois sont négligeables. Ce résultat pouvait être prévu *a priori* car alors l'accélération u' est commandée exclusivement par la résultante des pressions et devient nulle ($u' = 0$) à l'endroit où la pression devient stationnaire ($p' = 0$).

La coïncidence ainsi réalisée des valeurs stationnaires de u et p est localisée en $\frac{s'}{s} = \xi(\gamma - 1)\frac{q}{u^2}$. Cette valeur, étant du signe de q, la situe en aval du col si q est positif, et en amont du col si q est négatif.

Le maximum de v correspond alors à $\frac{s'}{s} = (\gamma - 1)\frac{q}{u^2}$, qui le situe du même côté par rapport au col, et plus loin de celui-ci puisque $\xi < 1$.

Le minimum de T correspond à

$$\frac{s'}{s} = (\xi\gamma - 1)\frac{q}{u^2} = [\xi(\gamma - 1) - (1 - \xi)]\frac{q}{u^2}.$$

Cette valeur est du signe opposé à celui de q lorsque $\xi < \frac{1}{\gamma}$ et de même signe lorsque $\xi < \frac{1}{\gamma}$. Nous retrouvons là la limite inférieure du domaine $\left(\frac{1}{\gamma} < \xi < 1\right)$ de l'anomalie thermique des écoulements cylindriques sans frottement [3] où

$$\frac{T'}{T} = \xi(\gamma - 1)\frac{1 - \xi\gamma}{1 - \xi}\frac{q}{u^2}$$

est du signe opposé à celui de q.

[3] *Journ. de Phys.*, septembre 1942, p. 166.

Considérons par exemple le cas où $q > 0$, ce qui situe les valeurs stationnaires des trois autres fonctions en aval du col. Le col peut être assimilé à un petit élément d'écoulement cylindrique, et cette formule montre que, pour $\xi < \frac{1}{\gamma}$ on a $T' > 0$, c'est-à-dire que l'on a dépassé le minimum de T; autrement dit ce minimum est situé en amont du col. Pour $\xi = \frac{1}{\gamma}$, il est situé au col, et pour $\xi > \frac{1}{\gamma}$ il est en aval du col, entre celui-ci et la section stationnaire de u et p.

8. **Coïncidence des extrema des caractéristiques thermodynamiques.** — Si nous cherchons ensuite les conditions pour faire coïncider deux à deux les valeurs stationnaires des trois caractéristiques thermodynamiques v, T et p, nous constaterons que les deux équations correspondantes en k sont compatibles, avec la solution $k = -1$ qui rend égales à 1 les trois dernières expressions (10). Ce résultat était prévisible, car la condition $k = -1$ ou $q = -w$ est celle qui réalise l'isentropie par compensation. Alors les deux équations simultanées $pv^\gamma = \text{const.}$ et $pv = RT$, ou $\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dv}{v} = 0$ et $\frac{dp}{p} + \frac{dv}{v} = \frac{dT}{T}$, exigent la coïncidence des valeurs stationnaires de p et v, puis aussi de T.

Cette triple coïncidence est localisée en $\frac{s'}{s} = \frac{w}{u^2}$, c'est-à-dire en aval du col.

Le maximum de u est alors situé en $\frac{s'}{s} = \xi \frac{w}{u^2}$, c'est-à-dire entre le col et la section triple.

9. **Tableau des sections stationnaires.** — On peut grouper tous ces résultats dans le tableau suivant qui indique, pour les diverses valeurs de k ainsi mises en évidence, les valeurs de $\frac{s'}{s}$ qui caractérisent les sections où sont localisées les maxima ou minima de u, v, T et p.

$k =$	$-\infty$	$-\frac{\gamma}{\gamma-1}$	-1	0	
$u' = 0 \ldots\ldots$	$\xi(\gamma-1)\frac{q}{u^2}$	0	$\xi \frac{w}{u^2}$	$\xi\gamma \frac{w}{u^2}$	
$v' = 0 \ldots\ldots$	$(\gamma-1)\frac{q}{u^2}$	0	$\frac{w}{u^2}$	$\gamma \frac{w}{u^2}$	(14)
$T' = 0 \ldots\ldots$	$[\xi(\gamma-1)-(1-\xi)]\frac{q}{u^2}$	$\frac{\gamma}{\gamma-1}(1-\xi)\frac{w}{u^2}$	$\frac{w}{u^2}$	$\xi\gamma \frac{w}{u^2}$	
$p' = 0 \ldots\ldots$	$\xi(\gamma-1)\frac{q}{u^2}$	$(1-\xi)\frac{w}{u^2}$	$\frac{w}{u^2}$	$[\xi\gamma+(1-\xi)]\frac{w}{u^2}$	
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
	$(\gamma-1)\frac{q}{u^2}$	0	$\frac{w}{u^2}$	$\gamma \frac{w}{u^2}$	

10. **Déplacements des sections stationnaires.** — Lorsque l'on donne à la différence de pression motrice $(p_0 - p_5)$ des valeurs de plus en plus grandes, toutes les sections stationnaires se déplacent, non seulement parce que les valeurs de ξ vont partout en croissant, mais aussi parce que les valeurs de $\frac{q}{u^2}$ et $\frac{w}{u^2}$, et corrélativement de $k = \frac{q}{w}$, varient. Cela entraîne par exemple que la section stationnaire de v déterminée par $\frac{s'}{s} = [(\gamma - 1)k + \gamma]\frac{w}{u^2}$ se déplace, bien qu'elle ne dépende pas explicitement de ξ.

On remarquera que $\frac{w}{u^2} = \frac{1}{2}\frac{w}{\frac{1}{2}u^2}$ est la moitié de la fraction de l'énergie cinétique orientée qui se décoordonne sur l'unité de longueur de parcours; $\frac{q}{u^2}$ est de même la moitié de l'apport de chaleur sur ce même parcours, exprimé en fraction de l'énergie cinétique orientée existante.

Même si l'on admet que la fraction $\frac{w}{u^2}$ varie peu avec la vitesse u, conformément à l'hypothèse de première approximation utilisée dans la théorie élémentaire des turbines, il y a lieu de prévoir en général des variations importantes de $\frac{q}{u^2}$ en fonction de la vitesse d'écoulement.

Par exemple, dans l'hypothèse d'une évacuation de chaleur ($q < 0$) liée au fait que la température de départ T_0 du gaz serait assez élevée au-dessus de la température ambiante $\mathcal{C}$ pour que l'on puisse négliger en première approximation les variations de l'excès de température du gaz $(T - \mathcal{C})$, q varierait à peu près proportionnellement au temps de présence de l'unité de masse sur le parcours unitaire considéré, c'est-à-dire proportionnellement à $\frac{1}{u}$. Il en résulterait pour $\frac{q}{u^2}$ une diminution (en

valeur absolue) très rapide, proportionnelle à $\frac{1}{u^3}$, lorsque la vitesse d'écoulement augmente. Pour $k = \frac{q}{w}$, on aurait une diminution (en valeur absolue) proportionnelle à $\frac{1}{u^3}$, si l'on considère $\frac{w}{u^3}$ comme pratiquement constant.

Considérons au contraire l'hypothèse où, la température de départ T_0 étant égale à la température ambiante $\mathcal{C}$, l'échange de chaleur serait provoqué seulement par le refroidissement $(T_0 - T)$ dû à la détente. On aurait alors un apport de chaleur $(q < 0)$ produit par l'écart de température $\mathcal{C} - T = T_0 - T$, avec la relation

$$C(T_0 - T) + \int_0^\nu q(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}u^2.$$

Elle montre que $(T_0 - T)$ croît suivant une loi un peu différente de la proportionnalité à u^2. Alors, si l'apport q était dû seulement à la conduction, c'est-à-dire proportionnel à $\frac{T_0 - T}{u}$, il croîtrait suivant une loi plus ou moins proche de la proportionnalité à u. La décroissance de $k = \frac{q}{w}$ serait alors plus ou moins voisine de la proportionnalité à $\frac{1}{u}$.

L'estimation, même approximative, des valeurs possibles pour $q(x)$ apparaît comme une étude très complexe que nous n'aborderons pas ici.

11. Naissance de la section sonique. — Lorsque ξ tend vers 1, les quatre valeurs de $\frac{s'}{s}$ qui caractérisent, pour l'une quelconque des quatre valeurs particulières de k portées au tableau (14), les sections stationnaires tendent vers la valeur commune indiquée dans la dernière ligne de ce tableau. Cela conduit à penser que, quelles que soient les variations de k, à mesure que l'on augmente la pression motrice $(p_0 - p_5)$, les quatre sections stationnaires se rapprochent les unes des autres pour venir se confondre dans la section où va apparaître la vitesse sonique.

En effet, lorsque ξ tend vers 1, les équations (10) qui expriment la coïncidence des quatre sections stationnaires se réduisent à

$$(\gamma - 1)k + \gamma = (\gamma - 1)k + \gamma$$
$$= (\gamma - 1)k + \gamma = (\gamma - 1)k + \gamma$$

qui sont satisfaites quelle que soit la valeur de k.

On aurait pu étudier directement la naissance de la vitesse sonique en observant que le rapport $\frac{u}{a}$ atteindra la valeur 1 dans la section où il passe par son maximum. Cela revient à étudier la valeur de $\frac{s'}{s}$ pour laquelle $\frac{u}{a}$ ou $\frac{u^2}{a^2} = \xi$, ou $\frac{u^2}{T}$, passe par un maximum.

On a pour cela la condition

$$T\,2uu' - u^2 T' = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{T'}{T} = 2\,\frac{u'}{u}$$

qui s'écrit en utilisant les équations (6) et (8)

$$\xi(\gamma - 1)\left[\frac{s'}{s} + (1 - \xi\gamma)\frac{q}{u^2} - \xi\gamma\frac{w}{u^2}\right]$$
$$= -2\frac{s'}{s} + 2\xi(\gamma - 1)\frac{q}{u^2} + 2\xi\gamma\frac{w}{u^2}$$

ou

$$[\xi(\gamma - 1) + 2]\frac{s'}{s} = [2\xi(\gamma - 1) - \xi(\gamma - 1)(1 - \xi\gamma)]\frac{q}{u^2}$$
$$+ [2\xi\gamma + \xi^2\gamma(\gamma - 1)]\frac{w}{u^2}$$

ou

$$\frac{s'}{s} = \frac{[2\xi(\gamma - 1) - \xi(\gamma - 1)(1 - \xi\gamma)]k + 2\xi\gamma + \xi^2\gamma(\gamma - 1)}{\xi(\gamma - 1) + 2}\,\frac{w}{u^2}. \quad (15)$$

Cette expression donne, lorsque l'on fait tendre ξ vers 1,

$$\frac{s'}{s} = [(\gamma - 1)k + \gamma]\frac{w}{u^2}. \quad (16)$$

On retrouve bien ainsi, pour les valeurs particulières de k portées au tableau (14), les valeurs limites de $\frac{s'}{s}$ indiquées à la dernière ligne de ce tableau.

Au moment où les cinq sections stationnaires de u, v, T, p et $\frac{u}{a}$ viennent ainsi se confondre, elles cessent d'être stationnaires pour donner naissance à la section sonique.

12. Section sonique dans l'écoulement de Laval préétabli. — A partir de cet instant, de nouvelles augmentations de $(p_0 - p_5)$ ne modifieront plus rien en amont de la région où la vitesse est sonique ou supersonique; par conséquent elles ne déplaceront pas la section sonique elle-même. On doit donc trouver le même résultat si, au lieu d'étudier sa naissance au cours des écoulements subsoniques préparatoires — comme nous l'avons fait ci-dessus — on cherche à déterminer sa position dans l'écoulement de Laval supposé préétabli.

Les équations (6 à 9) le permettent très facilement.

La section sonique est en effet caractérisée par $\xi = 1$, avec la condition que les dérivées u', v', T' et p' y restent finies. Il faut donc que les sommes qui figurent aux seconds membres de ces quatre équations s'annulent. On constate immédiatement que, pour $\xi = 1$, elles s'annulent ensemble pour la valeur de $\frac{s'}{s}$ qui a été écrite en (16).

Cette expression montre que la section sonique n'est située au col $(s' = 0)$ que si l'on a $k = -\frac{\gamma}{\gamma - 1}$, condition qui est satisfaite dans le cas particulier de l'isentropie adiabatique $q = w = 0$. Elle n'est pas satisfaite dans le cas de l'isentropie par compensation $(k = -1)$.

Manuscrit reçu le 24 avril 1947.

A PROPOS DE LA VARIATION THERMIQUE DE LA BIRÉFRINGENCE MAGNÉTIQUE DE QUELQUES LIQUIDES ORGANIQUES

Par J. RABINOVITCH et V. KUNZL.

Sommaire. — Nous comparons, dans ce travail, les résultats de nos mesures sur la variation thermique de la biréfringence magnétique du nitrobenzène, du chlorobenzène, de l'ortho-dichlorobenzène et du mésitylène à ceux obtenus par Goldet et par Grodde; cette comparaison confirme les résultats de Goldet. Nous donnons en outre les résultats des mesures que nous avons faites sur le β-éthylnaphtalène et sur l'α-bromonaphtalène.

L'hypothèse de l'orientation moléculaire, émise par Cotton et Mouton, pour expliquer le phénomène de biréfringence magnétique, a conduit à des formules théoriques de dispersion et de variation thermique du phénomène dont la vérification s'est montrée laborieuse. En ce qui concerne la dispersion, Servant [1] est arrivé à donner des formules que l'expérience vérifie de très près. Par contre, en particulier dans les liquides, les formules proposées pour exprimer la variation de l'effet Cotton et Mouton en fonction de la température, ne vérifient pas les résultats expérimentaux, sauf dans un nombre de cas très restreint.

Les travaux récents sur la variation thermique de la biréfringence magnétique, les plus intéressants au point de vue expérimental, sont ceux de König [2], de Goldet [3] et de Grodde [4].

König a étudié les variations thermiques d'une même substance à l'état de vapeur et à l'état liquide; les résultats qu'il a obtenus sur le benzène et sur le nitrobenzène se raccordent très mal pour les deux états. Pour le benzène, la biréfringence moléculaire est plus grande pour la vapeur que pour le liquide (environ deux fois); pour le nitrobenzène c'est le contraire qui se produit.

Cette discordance n'a rien de surprenant, étant donné que la même loi ne peut régir à la fois la variation thermique lorsque la substance est dans l'un ou l'autre état physique. A l'état vapeur les molécules sont quasi indépendantes les unes des autres et on n'a à tenir compte que de leurs anisotropies propres (optiques et magnétiques) et des fluctuations de densité. A l'état liquide, pour un même volume, les fluctuations de densité sont relativement moindres, mais par contre les molécules agissent les unes sur les autres et l'on doit faire intervenir les champs moléculaires et probablement une anisotropie de forme qui est modifiée lorsque les molécules ont tendance à s'orienter, car il n'est pas interdit d'imaginer une certaine élasticité de la molécule.

Les mesures de Goldet sur les substances de la série benzénique peuvent s'interpréter dans l'hypothèse de Ramachandra Rao [5] d'une anisotropie optique δ de la molécule variable avec la température. Il se trouve en effet que les variations de δ déduites des mesures de biréfringence magnétique ont lieu dans le même sens que celles qui résultent des mesures de dépolarisation de la lumière. En particulier, pour la plupart des dérivés benzéniques (sauf pour le nitrobenzène) δ est croissant avec la température.

Quantitativement l'accord n'existe pas et il est plus prudent, comme le fait Goldet, de parler d'anisotropie apparente, en attendant qu'une théorie plus complète, faisant intervenir les interactions moléculaires, rende compte des différents aspects de la variation thermique de l'effet Cotton et Mouton.

C'est en se plaçant à ce point de vue que Grodde cherche à interpréter les résultats de ses mesures sur un certain nombre de liquides organiques. Grodde trouve, en vérifiant la constance du produit de la constante molaire C_m (définie par Briegleb [9]) par la température absolue T, que la théorie de l'orientation, telle qu'elle a été développée successivement par Langevin [6], Born [7] et Gans [8], n'est applicable que pour quelques substances diamagnétiques.

Certaines substances de la série benzénique ont été étudiées simultanément par Goldet et Grodde, mais, comme nous le signalions dans le rapport présenté par l'un de nous au Congrès international sur le Magnétisme de 1939 [10] — et contrairement à l'affirmation de Grodde — les résultats obtenus par Goldet et ceux de Grodde sont loin d'être concordants. Il nous a paru utile, de ce fait, de reprendre les mesures faites sur le nitrobenzène, le

chlorobenzène, l'ortho-dichlorobenzène et le mésitylène. Nous donnons en outre dans ce Mémoire les résultats de mesures effectuées sur deux dérivés naphtaléniques : l'α-bromonaphtalène et le β-éthylnaphtalène.

Nous nous sommes servi du bain thermostatique de Goldet réglé électriquement dans le champ magnétique du grand électro-aimant de Bellevue et les mesures de biréfringences ont été faites pour les radiations $\lambda = 578\ \mathrm{m}\mu$, $\lambda = 546\ \mathrm{m}\mu$ et, lorsque cela était possible, $\lambda = 436\ \mathrm{m}\mu$ de l'arc à vapeur de mercure, par la méthode du compensateur quart d'onde.

Les résultats de nos mesures sont consignés dans les Tableaux I à VI. Dans les graphiques qui suivent nous donnons les courbes comparatives des valeurs de la constante *C* de Cotton et Mouton en fonction de la température, obtenues d'après nos mesures, celles de Goldet et celles de Grodde (1).

Nitrobenzène. — Les mesures ont été faites avec les radiations $\lambda = 578\ \mathrm{m}\mu$ et $\lambda = 546\ \mathrm{m}\mu$. Le Tableau I donne l'angle β représentant la biréfringence dans la méthode de Chauvin et la constante *C* de Cotton et Mouton qui en résulte.

Tableau I.

λ = 578 mμ.			λ = 546 mμ.		
t (°C).	β (°).	$C.10^{12}$.	*t* (°C).	β (°).	$C.10^{12}$.
20.....	–	2,46	20.....	–	2,64
25,5...	8°39′	2,37	25.....	9°19′	2,55
37,5...	7°54′	$2,16_5$	26,4...	9°13′	$2,52_5$
49.....	7°18′	2,00	37.....	8°34′	$2,34_5$
58,9...	6°49′	$1,86_8$	49.....	7°54′	$2,16_4$
70.....	6°16′	$1,71_7$	60,5...	7°18′	2,00
			70,2...	6°50′	1,87
			83,6...	6°14′	$1,70_6$
			88,5...	6°4′	1,66
			96,8...	5°42′	1,56

La figure 1 confirme, pour $\lambda = 578\ \mathrm{m}\mu$, les mesures de Goldet : l'écart entre nos résultats et ceux de Goldet ne dépasse pas 1 pour 100. Par contre, pour $\lambda = 546\ \mathrm{m}\mu$, la variation thermique indiquée par Grodde semble être nettement trop faible.

Il serait intéressant de suivre également la variation thermique de la dispersion de biréfringence mais, ainsi que Goldet le fait remarquer, le rapport $\frac{C_v}{C_j}$ des constantes de Cotton et Mouton pour la raie

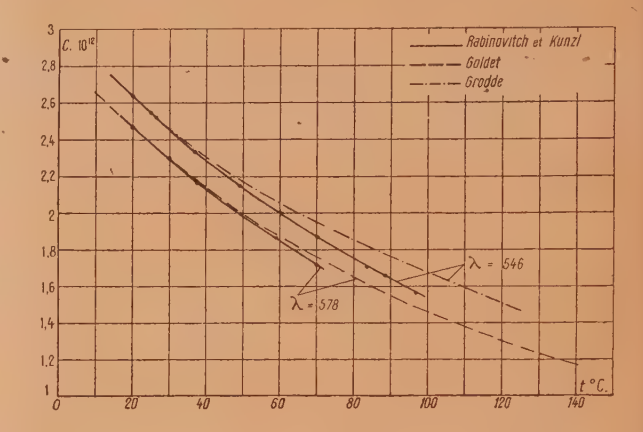


Fig. 1. — Constante de Cotton et Mouton du nitrobenzène.

verte et la raie jaune du mercure est trop voisin de l'unité pour qu'on puisse suivre, d'une façon précise, ses variations. Il faudrait, pour le faire, opérer avec des tubes polarimétriques plus longs et des champs magnétiques plus intenses (2).

Chlorobenzène. — Le Tableau II donne les résultats des mesures relatifs aux radiations $\lambda = 578\ \mathrm{m}\mu$, $\lambda = 546\ \mathrm{m}\mu$ et $\lambda = 436\ \mathrm{m}\mu$.

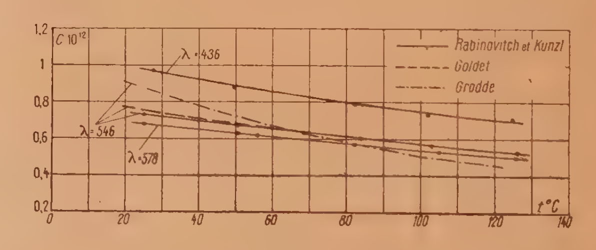


Fig. 2. — Constante de Cotton et Mouton du chlorobenzène.

Pour $\lambda = 546\ \mathrm{m}\mu$, l'écart maximum entre nos mesures et celles de Goldet (*fig.* 2) est de 1,2 pour 100; là encore les résultats de Goldet sont confirmés tandis que ceux de Grodde donnent une variation thermique beaucoup plus rapide, à l'inverse de ce qui avait lieu pour le nitrobenzène.

A 25° C, nos mesures donnent les rapports de

(1) Il y a dans les valeurs de *C* calculées par cet auteur une erreur provenant du fait qu'il prend pour le nitrobenzène à 20° C pour la radiation $\lambda = 546\ \mathrm{m}\mu$, la valeur $C = 2,46.10^{-12}$. Or cette valeur correspond en réalité à la radiation $\lambda = 578\ \mathrm{m}\mu$. Nous avons tenu compte de la confusion faite par Grodde et nous avons rectifié toutes ses valeurs de *C* en prenant pour le nitrobenzène à 20° C et pour $\lambda = 546\ \mathrm{m}\mu$ la valeur $C = 2,64.10^{-12}$.

(2) Dans une série de mesures antérieures faites à 21° C, sans cuve thermostatique, nous avions trouvé les angles de biréfringences : $\beta_v = 24°2'$ et $\beta_j = 22°21'$, ce qui donne le rapport $\frac{\beta_v}{\beta_j} = 1,07_5$ valeur en bon accord avec celle donnée par Goldet ($1,07_6$).

TABLEAU II.

λ = 578 mμ.			λ = 546 mμ.			λ = 436 mμ.		
t (°C).	β (°).	C.10¹².	t (°C).	β (°).	C.10¹².	t (°C).	β (°).	C.10¹².
25....	2°30′	$0,68_5$	25....	2°39′	$0,72_6$	27,7..	3°32′	$0,96_8$
50,5..	2°18′	0,63	50,6..	2°27′	$0,67_1$	49,5..	3°15′	0,89
55,8..	2°16′	$0,62_1$	83,9..	2°12′	$0,60_3$	82,2..	2°53′	0,79
82,2..	2°5′	$0,57_1$	102,8..	2°3′	$0,56_2$	102,2..	2°40′	$0,73_1$
105....	1°56′	0,53	126....	1°56′	0,53	124,9..	2°36′	$0,71_2$
125,8..	1°50′	$0,50_2$						

TABLEAU III.

λ = 578 mμ.			λ = 546 mμ.			λ = 436 mμ.		
t (°C).	β (°).	C.10¹².	t (°C).	β (°).	C.10¹².	t (°C).	β (°).	C.10¹².
27,2..	3°14′	$0,88_6$	26,8..	3°31′	$0,96_6$	27,3...	4°42′	$1,28_8$
63,2..	2°40′	$0,73_1$	64,4..	2°56′	$0,80_4$	65,5...	3°53′	$1,06_4$
100,6..	2°21′	$0,64_4$	100....	2°32′	$0,69_4$	99,1...	3°16′	$0,89_5$
			126,2..	2°21′	$0,64_4$			

dispersion

$$\frac{\beta_v}{\beta_j} = 1{,}06 \quad \text{et} \quad \frac{\beta_i}{\beta_j} = 1{,}42.$$

Ortho-dichlorobenzène. — Le Tableau III donne les résultats des mesures pour les radiations $\lambda = 578\,\text{m}\mu$, $\lambda = 546\,\text{m}\mu$ et $\lambda = 436\,\text{m}\mu$.

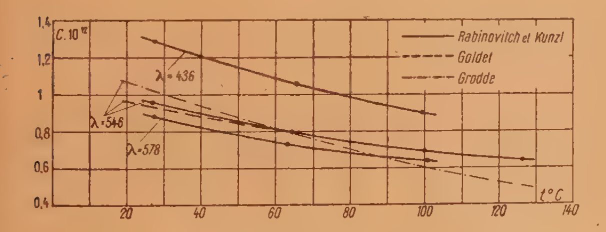


Fig. 3. — Constante de Cotton et Mouton de l'ortho-dichlorobenzène.

Pour $\lambda = 546\,\text{m}\mu$, nous trouvons une courbe (*fig.* 3) dont la pente aux environs de la température ambiante est légèrement plus grande que celle de Goldet (écart de 2 pour 100 environ). Comme pour le chlorobenzène, la variation thermique donnée par Grodde est nettement plus rapide.

Les rapports de dispersion à 27° C qui résultent de nos mesures sont : $\frac{C_v}{C_j} = 1{,}09$ et $\frac{C_i}{C_j} = 1{,}46$. (Goldet donne la valeur $\frac{C_v}{C_j} = 1{,}07$.)

Mésitylène. — Nos mesures ont porté sur deux échantillons de provenances différentes : d'une part, le produit même dont s'était servi Goldet (G) et, d'autre part, un mésitylène provenant de Kahlbaum (K). Ces deux échantillons ont donné des résultats très différents quant à la biréfringence magnétique. Le mésitylène (K) possède en effet une biréfringence magnétique environ 15 pour 100 plus forte que l'échantillon (G).

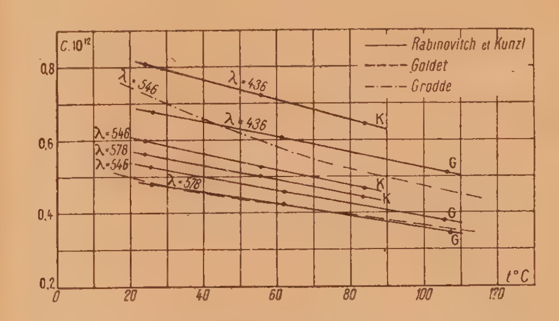


Fig. 4. — Constante de Cotton et Mouton de deux échantillons de mésitylène (G, ayant servi à Goldet; K, provenant de Kahlbaum).

Dans le Tableau IV on trouvera les résultats des mesures pour les trois radiations principales de l'arc au mercure.

Pour l'un comme pour l'autre des échantillons de mésitylène, entre 25 et 100° C, la variation de biréfringence est quasi linéaire (*fig.* 4). Jusqu'à

présent, seul le benzène (mesures de Goldet) présente une variation thermique quasi linéaire dans un domaine de températures plus large (de 10 à 200° C).

Pour $\lambda = 578$ mμ, l'échantillon (G) nous a donné une courbe très voisine de celle de Goldet. La courbe représentant les résultats de Grodde, pour $\lambda = 546$ mμ, correspond à des variations thermiques plus rapides.

TABLEAU IV.

λ = 578 mμ.			λ = 546 mμ.			λ = 436 mμ.		
t (°C).	β (°).	C.10¹².	t (°C).	β (°).	C.10¹².	t (°C).	β (°).	C.10¹².
Mesitylène (G).								
25,7..	1°45′	$0,47_9$	25,5..	1°55′	$0,52_6$	26....	2°28′	$0,67_6$
61,7..	1°33′	$0,42_5$	61,7..	1°40′	$0,45_6$	61,2..	2°13′	$0,60_7$
106,7..	1°15′	$0,34_2$	105,4..	1°23′	$0,37_9$	106,1..	1°51′	$0,50_7$
Mesitylène (K).								
24.....	2°3′	$0,56_2$	24.....	2°11′	$0,59_8$	24.....	2°57′	$0,80_8$
55,5...	1°50′	$0,50_2$	55,5...	1°55′	$0,52_5$	55,5...	2°38′	$0,72_1$
83,2...	1°37′	$0,44_3$	83,5...	1°42′	$0,46_6$	83,8...	2°21′	$0,64_1$

Si nous nous reportons à une mesure plus ancienne, faite par Cotton et Mouton [11], nous trouvons à $t = 16°$ C et pour $\lambda = 578$ mμ, la valeur $C = 0{,}56.10^{-12}$, valeur intermédiaire entre les résultats concernant l'échantillon utilisé par Goldet et l'échantillon Kahlbaum (plus voisine de l'échantillon Kahlbaum). Par ailleurs Matull [12] donne la valeur $C = 0{,}709.10^{-12}$ pour $\lambda = 546$ mμ et $t = 20°$ C.

On est dans le cas du mésitylène, en présence d'une nette discordance due aux provenances diverses des échantillons. Cette discordance pourrait s'expliquer par la présence de l'isomère moins symétrique : le pseudocumène dont la biréfringence magnétique est supérieure à celle du mésitylène. Le produit le plus pur (sans doute l'échantillon utilisé par Goldet) présente alors la biréfringence magnétique la plus faible.

Les rapports de dispersion des deux échantillons sont :

Mésitylène (G) :

$$t = 25° \text{C}, \qquad \frac{\beta_v}{\beta_j} = 1{,}09, \qquad \frac{\beta_i}{\beta_j} = 1{,}43.$$

Mésitylène (K) :

$$t = 24° \text{C}, \qquad \frac{\beta_v}{\beta_j} = 1{,}07, \qquad \frac{\beta_i}{\beta_j} = 1{,}44.$$

β-éthylnaphtalène. — Le Tableau V et la figure 5 donnent la variation thermique de la biréfringence magnétique de ce dérivé naphtalénique pour les radiations $\lambda = 578$ mμ et $\lambda = 546$ mμ.

TABLEAU V.

λ = 578 mμ.			λ = 546 mμ.		
t (°C).	β (°).	C.10¹².	t (°C).	β (°).	C.10¹².
26.....	5°57′	1,63	26,5..	6°21′	1,74
38,1..	5°46′	1,58	38....	6°8′	1,68
76,6..	5°17′	$1,44_7$	76,4..	5°40′	$1,55_3$
107,7..	4°53′	$1,33_8$	107,9..	5°18′	$1,45_2$
137,3..	4°33′	$1,24_7$	138....	4°52′	$1,33_3$

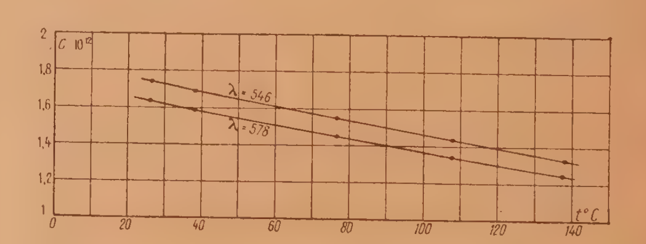


Fig. 5. — Constante de Cotton et Mouton du β-éthylnaphtalène.

Le rapport de dispersion à 26° C est $\frac{\beta_v}{\beta_j} = 1{,}06_7$.

α-bromonaphtalène. — Le Tableau VI et la figure 6 donnent les résultats des mesures pour $\lambda = 578$ mμ et $\lambda = 546$ mμ.

TABLEAU VI.

$\lambda = 578$ mµ.			$\lambda = 546$ mµ.		
t (°C).	β (°).	$C.10^{12}$.	t (°C).	β (°).	$C.10^{12}$.
17,5..	9° 19′	$2,55_3$	17,5..	9° 53′	$2,70_8$
23....	9° 6′	$2,49_3$	24....	9° 40′	$2,64_9$
33....	8° 52′	2,43	36,8..	9° 19′	$2,55_3$
37,8..	8° 44′	$2,39_3$	41,6..	9° 6′	$2,49_3$
42....	8° 32′	$2,33_8$	54,9..	8° 48′	$2,41_1$
53,2..	8° 17′	$2,26_9$	61....	8° 38′	$2,36_5$
64,3..	8°	$2,19_2$	79,9..	8° 10′	$2,23_8$
73....	7° 48′	$2,13_7$	100,6..	7° 40′	$2,10_1$
84....	7° 32′	$2,06_4$	115....	7° 20′	$2,00_9$
100,7..	7° 14′	$1,98_2$	144,8..	6° 52′	$1,88_2$
115....	6° 55′	$1,89_5$			
127,3..	6° 42′	$1,83_6$			
144....	6° 26′	$1,76_3$			

Ce liquide présente un intérêt particulier par la grandeur de sa biréfringence magnétique qui est de l'ordre de celle du nitrobenzène et par la variation relativement faible de cette biréfringence en fonction de la température : le coefficient de variation thermique $\alpha = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\Delta\beta}{\Delta t}$ qui est de $\frac{1}{300}$ à 25° C est environ deux fois plus petit que celui du nitrobenzène. On aurait par conséquent intérêt, dans les mesures relatives, à abandonner ce dernier comme terme de comparaison et à le remplacer par l'α-bromonaphtalène [13].

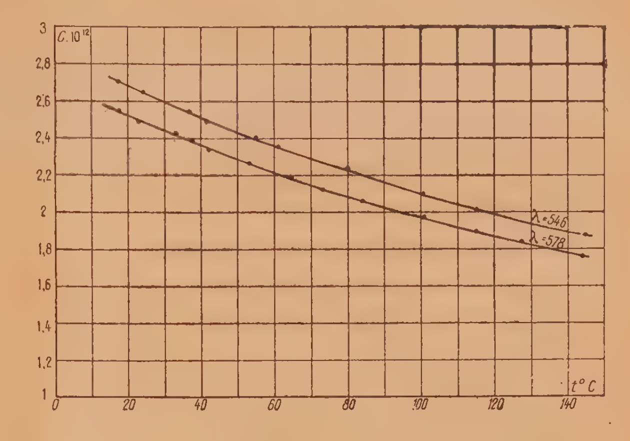


Fig. 6. — Constante de Cotton et Mouton du bromonaphtalène-α.

Manuscrit reçu le 15 avril 1947.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] R. SERVANT, *J. de Physique*, 1943, **4**, p. 105.

[2] H. KÖNIG, *Annalen der Physik*, 1938, **31**, p. 289.

[3] A. GOLDET, *Annales de Physique*, 1938, **10**, p. 103.

[4] K. H. GRODDE, *Physikalische Zeitschr.*, 1938, **39**, p. 772.

[6] RAMACHANDRA RAO, *Ind. J. of Physics*, 1928, **3**, p. 21.

[5] P. LANGEVIN, *Le Radium*, 1910, **7**, p. 249.

[7] M. BORN, *Ann. der Physik*, 1918, **55**, p. 177.

[8] R. GANS, *Ann. der Physik*, 1921, **65**, p. 97.

[9] G. BRIEGLEB, *Zeitsch. f. phys. Chem.*, (B), 1931, **14**, p. 97 et 1932, **16**, p. 249.

[10] J. RABINOVITCH, *Le magnétisme* (collection scientifique, Institut International de Coopération intellectuelle), 1940, **1**, p. 1.

[11] A. COTTON et H. MOUTON, *Annales de Chimie et de Physique*, 1913, **28**, p. 209.

[12] E. MATULL, *Ann. der Physik*, 1934, **21**, p. 345.

[13] J. RABINOVITCH, *C. R. Acad. Sc.*, 1947, **224**, p. 909 et 1947, **224**, p. 1420.

LES ÉQUATIONS D'ONDES DU SECOND ORDRE DANS LA THÉORIE DU MÉSON

Par Gérard PETIAU.
Institut Henri Poincaré.

Sommaire. — Nous nous proposons dans ce travail d'établir et d'étudier les équations d'ondes du second ordre pour le corpuscule de spin $\frac{h}{2\pi}$ (méson) placé dans un champ électromagnétique. Après avoir rappelé les résultats du problème correspondant dans la théorie de l'électron de Dirac, nous considérons le cas des équations d'ondes du corpuscule de spin $\frac{h}{2\pi}$ sous leurs différents aspects : équations de Proca vectorielles ou scalaires, équations matricielles du méson, équations du photon de M. Louis de Broglie.

1. **Les équations du second ordre de la théorie de l'électron de Dirac.** — Les équations d'ondes de Dirac représentent l'évolution de l'électron par les solutions ψ du système d'équations linéaires

$$\left[P_0 + \sum_p P_p \alpha_p + m_0 c \alpha_4\right]\psi = 0, \tag{1}$$

où

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= \frac{h}{2\pi \mathrm{i}}\frac{1}{c}\partial_t + \frac{\varepsilon}{c}V = \frac{h}{2\pi \mathrm{i}}\frac{1}{c}\partial_t + \frac{\varepsilon}{c}A_0, \\ P_x = P_1 &= -\frac{h}{2\pi \mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{c}A_x = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\varepsilon}{c}A_1, \\ P_y &= P_2, \\ P_z &= P_3. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ε désigne la charge de la particule (pour l'électron $\varepsilon = -e$.) $A_x = -A_1$, $A_y = -A_2$, $A_z = -A_3$, $V = A_0$ représentent les composantes du potentiel vecteur et le potentiel scalaire du champ électromagnétique dans lequel est placé le corpuscule. Ce champ est défini par les composantes

$$F_{ij} = \partial_j A_i - \partial_i A_j \qquad (i, j = 0, 1, 2, 3)$$

liées par les relations

$$\partial_i F^{ij} = 0, \qquad \partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij} = 0,$$

où

$$E_x = F_{10}, \qquad E_y = F_{20}, \qquad E_z = F_{30};$$
$$H_x = F_{23}, \qquad H_y = F_{31}, \qquad H_z = F_{12},$$

la connexion étant définie par les coefficients

$$g_{00} = +1, \qquad g_{pp} = -1, \qquad g_{pq} = g_{p0} = 0.$$

α_1, α_2, α_3, α_4 forment un système de quatre matrices du quatrième rang telles que

$$\alpha_\mu \alpha_\nu + \alpha_\nu \alpha_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4).$$

Si nous multiplions l'équation (1) par l'opérateur

$$P_0 - (\Sigma_p P_p \alpha_p + m_0 c \alpha_4),$$

nous obtenons immédiatement

$$\left\{P_0^2 - \sum_p P_p^2 - m_0^2 c^2 + \sum_p (P_0 P_p - P_p P_0)\alpha_p - \sum_{(pq)} (P_p P_q - P_q P_p)\alpha_p \alpha_q\right\}\psi = 0.$$

or

$$P_p P_q - P_q P_p = \frac{\mathrm{i}h}{2\pi}\frac{\varepsilon}{c}F_{pq};$$

$$P_0 P_p - P_p P_0 = \frac{\mathrm{i}h}{2\pi}\frac{\varepsilon}{c}F_{p0},$$

d'où l'équation

$$\left\{P_0^2 - \sum_p P_p^2 - m_0^2 c^2 - \frac{h}{2\pi}\frac{\varepsilon}{c}\left[\sum_{(pq)} F_{pq}\,\mathrm{i}\alpha_p\alpha_q - \sum_p F_{p0}\,\mathrm{i}\alpha_p\right]\right\}\psi = 0.$$

Pour rapprocher cette équation de l'équation d'onde non relativiste correspondant à l'hamiltonien

$$\frac{1}{2m_0}\left[\sum_p P_p^2\right],$$

nous devons la multiplier par $\frac{\alpha_4}{2m_0}$, ce qui nous donne l'équation

$$\left\{\frac{\alpha_4}{2m_0}\left[P_0^2 - \left(\sum_p P_p^2 + m_0^2 c^2\right)\right] - \frac{h\varepsilon}{4\pi m_0 c}\left[\sum_{pq} F_{pq}\,\mathrm{i}\alpha_p\alpha_q\alpha_4 + \sum_p F_{p0}\,\mathrm{i}\alpha_p\alpha_4\right]\right\}\psi = 0$$

ou encore, en posant

$$F_{pq} = H_r, \qquad i\alpha_p\alpha_q\alpha_4 = \mu_r;$$
$$F_{p0} = E_p, \qquad i\alpha_p\alpha_4 = \pi_p;$$

$$\left\{\frac{\alpha_4}{2m_0}\left[P_0^2 - \left(\sum_p P_p^2 + m_0^2 c^2\right)\right] - \frac{h\varepsilon}{4\pi m_0 c}(\mathbf{H}.\boldsymbol{\mu} + \mathbf{E}.\boldsymbol{\pi})\right\}\psi = 0.$$

L'équation du second ordre dérivée de l'hamiltonien classique

$$\frac{1}{2m_0}\left[P_0^2-\left(\sum_p P_p^2+m_0^2c^2\right)\right]$$

se trouve donc complétée par un terme supplémentaire dû à l'intervention de l'énergie potentielle correspondant à l'existence du moment électromagnétique propre de composantes

$$\frac{\varepsilon h}{4\pi m_0 c}\mu, \qquad \frac{\varepsilon h}{4\pi m_0 c}\pi.$$

Nous pouvons également arriver à ce résultat en utilisant au lieu de la variable d'espace-temps t, la variable d'univers $ict = x_4$.

Nous avons alors en posant $A_4 = -iA_0$

$$iP_0 = P_4 = -\frac{h}{2\pi i}\partial_4 - \frac{\varepsilon}{c}A_4,$$

$$P_p = -\frac{h}{2\pi i}\partial_p - \frac{\varepsilon}{c}A_p;$$

$$\gamma_4 = \alpha_4, \qquad \gamma_p = i\alpha_4\alpha_p,$$

d'où

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$$

et en multipliant l'équation (1) par $i\alpha_4$

$$[P_\mu\gamma^\mu + im_0c]\psi = 0.$$

La multiplication de cette équation par l'opérateur adjoint $P_\mu\gamma^\mu - im_0c$ donne immédiatement

$$\left\{\sum_\mu P_\mu^2 + m_0^2c^2 + \sum_{(\mu\nu)}(P_\mu P_\nu - P_\nu P_\mu)\gamma_\mu\gamma_\nu\right\}\psi = 0,$$

or

$$P_\mu P_\nu - P_\nu P_\mu = \frac{h}{2\pi i}\,\frac{\varepsilon}{c}[\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu] = \frac{ih}{2\pi}\,\frac{\varepsilon}{c}F_{\mu\nu},$$

d'où

$$\left\{\sum_\mu P_\mu^2 + m_0^2c^2 + \sum_{(\mu\nu)}\frac{h}{2\pi}\,\frac{\varepsilon}{c}\,i\,F_{(\mu\nu)}\gamma^\mu\gamma^\nu\right\}\psi = 0$$

et en divisant par $2m_0$

$$\left\{\frac{1}{2m_0}\left[\sum_\mu P_\mu^2 + m_0^2c^2\right] + \sum_{(\mu\nu)}\frac{h\varepsilon}{4\pi m_0 c}F_{(\mu\nu)}i\gamma^\mu\gamma^\nu\right\}\psi = 0.$$

Le moment électromagnétique propre de composantes $\frac{h\varepsilon}{4\pi m_0 c}i\gamma^\mu\gamma^\nu$ introduit l'opérateur d'énergie potentielle supplémentaire

$$\sum_{(\mu\nu)}\frac{h\varepsilon}{4\pi m_0 c}F_{\mu\nu}i\gamma^\mu\gamma^\nu.$$

2. Les équations d'ondes du second ordre dans la théorie de Proca. — On sait que cette théorie considère deux types d'équations d'ondes caractérisant les mésons vectoriels ou pseudoscalaires. Nous examinerons successivement ces deux cas.

A. *Cas du méson vectoriel.* — Les équations d'ondes représentant le corpuscule s'écrivent

$$\mathcal{E} = -D_t\mathcal{A} - \operatorname{grad}\mathcal{V}, \qquad \mathcal{H} = \operatorname{Rot}\mathcal{A}; \tag{1}$$

$$D_t\mathcal{E} = \operatorname{Rot}\mathcal{H} + k_0^2\mathcal{A}, \qquad \operatorname{Div}\mathcal{E} = -k_0^2\mathcal{V}, \tag{2}$$

$\mathcal{A}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$ représentant le quadrivecteur et le tenseur antisymétrique du second ordre dont l'évolution caractérise l'état du corpuscule.

D_p, D_t sont les opérateurs

$$D_t = \frac{1}{c}\partial_t + \frac{\varkappa\varepsilon}{c}V = \frac{1}{c}\partial_t + \frac{\varkappa\varepsilon}{c}A_0,$$

$$D_x = D_1 = \partial_x - \frac{\varkappa\varepsilon}{c}A_x = \partial_x + \frac{\varkappa\varepsilon}{c}A_1,$$

$$\varkappa = \frac{2\pi i}{h}, \qquad k_0 = \frac{2\pi}{h}m_0c.$$

Nous poserons

$$\mathcal{A}_x = -\mathcal{A}_1, \qquad \ldots, \qquad \mathcal{V} = \mathcal{A}_0;$$

$$\mathcal{E}_p = \mathcal{F}_{p0}, \qquad \ldots, \qquad \mathcal{H}_p = \mathcal{F}_{qr}.$$

Nous introduisons encore la connexion $g_{pp} = -1$, $g_{00} = 1$.

Le système (1), (2) s'écrira avec ces notations

$$D_\nu\mathcal{A}_\mu - D_\mu\mathcal{A}_\nu = \mathcal{F}_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3), \tag{3}$$

$$D_\nu\mathcal{F}^{\mu\nu} = -k_0^2\mathcal{A}^\mu, \tag{4}$$

tandis que le champ extérieur est défini par A_μ, $F_{\mu\nu}$, avec

$$\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu = F_{\mu\nu}, \qquad \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0. \tag{5}$$

On voit facilement que l'on a

$$D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu = \frac{\varkappa\varepsilon}{c}[\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu] = -\frac{\varkappa\varepsilon}{c}F_{\mu\nu}. \tag{6}$$

A partir du système (3), (4), nous pouvons déduire deux nouvelles équations qui en sont les conséquences.

D'une part, si nous appliquons l'opérateur D_μ à (4), nous avons

$$\sum_{\mu,\nu}D_\mu D_\nu\mathcal{F}^{\mu\nu} = \sum_{(\mu\nu)}(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\mathcal{F}^{\mu\nu} = -k_0^2 D_\mu\mathcal{A}^\mu,$$

d'où

$$D_\mu\mathcal{A}^\mu = \frac{\varkappa\varepsilon}{k_0^2 c}\sum_{(\mu\nu)}F_{(\mu\nu)}\mathcal{F}^{(\mu\nu)}. \tag{7}$$

D'autre part, l'équation (3) nous donne par permutation circulaire

$$D_{[\rho}\mathcal{F}_{\mu\nu]} = -\frac{\varkappa\varepsilon}{c}[F_{\rho\nu}\mathcal{A}_\mu + F_{\mu\rho}\mathcal{A}_\nu + F_{\nu\mu}\mathcal{A}_\rho]$$

que nous écrivons encore

$$D_{[\rho}\mathcal{F}_{\mu\nu]} = \frac{\varkappa\varepsilon}{c}\mathcal{A}_{[\rho}F_{\mu\nu]}. \tag{8}$$

Les équations (7) et (8) combinées avec les équa-

tions (3) et (4) vont nous conduire aux équations du second ordre.

Appliquons D_ν à (3), nous avons

$$[D_\nu D^\nu]\mathcal{A}_\mu - D_\nu D_\mu \mathcal{A}^\nu = D_\nu \mathcal{F}^{\mu\nu},$$

d'où

$$[D_\nu D^\nu + k_0^2]\mathcal{A}^\mu = \frac{\varkappa\varepsilon}{c} F^{\mu\nu}\mathcal{A}_\nu + \frac{\varkappa\varepsilon}{ck_0^2} D^\mu \left[\sum_{(\rho\sigma)} F_{(\rho\sigma)}\mathcal{F}^{(\rho\sigma)}\right]. \quad (9)$$

Le second membre traduit, d'une part, l'existence d'un moment magnétique propre par le terme en $\frac{\varkappa\varepsilon}{c} F^{\mu\nu}\mathcal{A}_\nu$ et montre, d'autre part, une action mésique d'un type particulier par le terme en $\frac{\varkappa\varepsilon}{ck_0^2}$.

Si nous considérons l'équation (8) sous la forme

$$D_\rho \mathcal{F}_{\mu\nu} + D_\mu \mathcal{F}_{\nu\rho} + D_\nu \mathcal{F}_{\rho\mu} = \frac{\varkappa\varepsilon}{c}\mathcal{A}_{[\rho} F_{\mu\nu]}$$

et si nous appliquons l'opérateur D^ρ, nous obtenons

$$[D^\rho D_\rho]\mathcal{F}_{\mu\nu} + D^\rho D_\mu \mathcal{F}_{\nu\rho} + D^\rho D_\nu \mathcal{F}_{\rho\mu} = \frac{\varkappa\varepsilon}{c} D^\rho \mathcal{A}_{[\rho} F_{\mu\nu]}$$

ou

$$[D_\rho D^\rho]\mathcal{F}_{\mu\nu} + D_\mu D^\rho \mathcal{F}_{\nu\rho} + D_\nu D^\rho \mathcal{F}_{\rho\mu} - \frac{\varkappa\varepsilon}{c}[F^\rho{}_\mu \mathcal{F}_{\nu\rho} + F^\rho{}_\nu \mathcal{F}_{\rho\mu}] = \frac{\varkappa\varepsilon}{c} D^\rho \mathcal{A}_{[\rho} F_{\mu\nu]}$$

ou encore

$$[D_\rho D^\rho]\mathcal{F}_{\mu\nu} - k_0^2[D_\mu \mathcal{A}_\nu - D_\nu \mathcal{A}_\mu] = \frac{\varkappa\varepsilon}{c}[F^\rho{}_\mu \mathcal{F}_{\nu\rho} + F^\rho{}_\nu \mathcal{F}_{\rho\mu}] + \frac{\varkappa\varepsilon}{c} D^\rho \mathcal{A}_{[\rho} F_{\mu\nu]},$$

ce qui nous donne l'équation du second ordre

$$[D_\rho D^\rho + k_0^2]\mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{\varkappa\varepsilon}{c}[F^\rho{}_\mu \mathcal{F}_{\nu\rho} - F^\rho{}_\nu \mathcal{F}_{\mu\rho}] + \frac{\varkappa\varepsilon}{c} D^\rho[\mathcal{A}_{[\rho} F_{\mu\nu]}]. \quad (10)$$

Nous pouvons encore modifier cette équation en évaluant le dernier terme.

En effet, nous avons

$$\begin{aligned} D^\rho \mathcal{A}_{[\rho} F_{\mu\nu]} &= D^\rho[\mathcal{A}_\rho F_{\mu\nu} + \mathcal{A}_\mu F_{\nu\rho} + \mathcal{A}_\nu F_{\rho\mu}] \\ &= (D^\rho \mathcal{A}_\rho) F_{\mu\nu} + (D^\rho \mathcal{A}_\mu) F_{\nu\rho} + (D^\rho \mathcal{A}_\nu) F_{\rho\mu} \\ &\quad + \mathcal{A}_\rho \partial^\rho F_{\mu\nu} + \mathcal{A}_\mu \partial^\rho F_{\nu\rho} + \mathcal{A}_\nu \partial^\rho F_{\rho\mu}. \end{aligned}$$

Or nous avons vu que

$$\partial_\rho F^{\nu\rho} = 0, \qquad \partial_\rho F^{\mu\rho} = 0;$$

$$D_\rho \mathcal{A}^\rho = \frac{\varkappa\varepsilon}{ck_0^2} F_{(\rho\sigma)}\mathcal{F}^{(\rho\sigma)}, \qquad D_\rho \mathcal{A}_\mu - D_\mu \mathcal{A}_\rho = \mathcal{F}_{\mu\rho},$$

nous en tirons

$$\begin{aligned} D^\rho \mathcal{A}_{[\rho} F_{\mu\nu]} &= \frac{\varkappa\varepsilon}{ck_0^2} F_{(\rho\sigma)}\mathcal{F}^{(\rho\sigma)} F_{\mu\nu} \\ &\quad + (D_\mu \mathcal{A}^\rho) F_{\nu\rho} + (D_\nu \mathcal{A}^\rho) F_{\rho\mu} \\ &\quad + \mathcal{F}_\mu{}^\rho F_{\nu\rho} - \mathcal{F}_\nu{}^\rho F_{\mu\rho} + \mathcal{A}_\rho(\partial^\rho F_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (11)$$

Reportant dans l'équation (10), nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} [D_\rho D^\rho + k_0^2]\mathcal{F}_{\mu\nu} &= \frac{2\varkappa\varepsilon}{c}[F^\rho{}_\mu \mathcal{F}_{\nu\rho} - F^\rho{}_\nu \mathcal{F}_{\mu\rho}] + \left(\frac{\varkappa\varepsilon}{c}\right)^2 \frac{1}{k_0^2} F_{(\rho\sigma)}\mathcal{F}^{(\rho\sigma)} F_{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{\varkappa\varepsilon}{c}[(D_\mu \mathcal{A}^\rho) F_{\nu\rho} - (D_\nu \mathcal{A}^\rho) F_{\mu\rho} + \mathcal{A}^\rho(\partial_\rho F_{\mu\nu})]. \end{aligned} \quad (12)$$

Ici encore à côté du terme traduisant l'existence du moment magnétique $\frac{\varkappa\varepsilon}{c}(F^\rho{}_\mu \mathcal{F}_{\nu\rho} - F_\nu{}^\rho \mathcal{F}_{\rho\mu})$ apparaissent de nouveaux termes correspondant à des effets mésiques sans équivalence dans la théorie de l'électron.

B. *Cas du méson scalaire* (ou pseudoscalaire). — Le corpuscule est représenté par l'invariant (ou le pseudo-invariant) J et le vecteur (ou pseudo-vecteur) U_μ, liés par les équations

$$U_\mu = D_\mu J, \quad (1)$$

$$D_\mu U^\mu + k_0^2 J = 0 \quad (2)$$

et nous avons encore

$$D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu = -\frac{\varkappa\varepsilon}{c} F_{\mu\nu}.$$

Nous obtenons immédiatement la relation

$$D_\mu U_\nu - D_\nu U_\mu = [D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu]J = -\frac{\varkappa\varepsilon}{c} F_{\mu\nu} J \quad (3)$$

et l'équation du second ordre

$$D_\mu D^\mu J = D^\mu U_\mu = -k_0^2 J$$

ou

$$[D_\mu D^\mu + k_0^2]J = 0. \quad (4)$$

De même l'équation (3) nous donne

$$D^\mu D_\mu U_\nu - D^\mu D_\nu U_\mu = -\frac{\varkappa\varepsilon}{c} D^\mu(F_{\mu\nu} J),$$

$$D^\mu D_\mu U_\nu - D_\nu D^\mu U_\mu + \frac{\varkappa\varepsilon}{c} F^\mu{}_\nu U_\mu = -\frac{\varkappa\varepsilon}{c} D^\mu(F_{\mu\nu} J).$$

Or

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0, \qquad D^\mu J = U^\mu$$

et il nous reste

$$[D_\mu D^\mu + k_0^2]U_\mu = \frac{2\varkappa\varepsilon}{c} F_{\mu\rho} U^\rho. \quad (5)$$

Cette équation peut d'ailleurs se déduire immédiatement de (4).

En effet, nous avons

$$D_\mu(D^\rho D_\rho) = D^\rho D_\rho D_\mu - \frac{2\varkappa\varepsilon}{c} F_{\mu\rho} D^\rho.$$

Appliquant D_μ à (4), on en tire avec (1)

$$[D_\rho D^\rho + k_0^2]U_\mu = \frac{2\varkappa\varepsilon}{c} F_{\mu\rho} U^\rho. \quad (6)$$

on retrouve donc encore un terme de moment

magnétique $\frac{2\varkappa\varepsilon}{c} F_{\mu\rho} U^\rho$ mais pas d'action de caractère nouveau.

3. Les équations du second ordre et les équations matricielles du méson. — Nous représentons le méson par l'équation d'onde

$$\left[P_0\beta_0+\sum_p P_p\beta_p+m_0c\eta\right]\Phi=0 \qquad (1)$$

ou

$$P_0=\frac{h}{2\pi i}\frac{1}{c}\partial_t+\frac{\varepsilon}{c}A_0=\frac{h}{2\pi i}D_t,$$

$$P_p=-\frac{h}{2\pi i}\partial_p-\frac{\varepsilon}{c}A_p=-\frac{h}{2\pi i}D_p,$$

β_0, β_p, η sont des matrices telles que

$$\beta_\mu\beta_\nu\beta_\rho+\beta_\rho\beta_\nu\beta_\mu=\delta_{\rho\nu}\beta_\mu+\delta_{\nu\mu}\beta_\rho \qquad (\mu,\nu,\rho=0,1,2,3),$$

$$\beta_0\eta=\eta\beta_0=\beta_0, \qquad \beta_p\eta+\eta\beta_p=0.$$

Nous passons de l'équation (1) à la forme d'univers correspondante en multipliant cette équation par $i\eta$, posant $x_4=ict$, $-iA_0=A_4$,

$$P_\mu=-\frac{h}{2\pi i}\partial_\mu-\frac{\varepsilon}{c}A_\mu.$$

$$P_\mu P_\nu-P_\nu P_\mu=\frac{h}{2\pi i}\frac{\varepsilon}{c}F_{\nu\mu}=\frac{ih\varepsilon}{2\pi c}F_{\mu\nu},$$

$$\Gamma_4=\eta\beta_0=\beta_0, \qquad \Gamma_p=i\eta\beta_p.$$

Nous avons alors entre matrices Γ_μ la relation

$$\Gamma_\mu\Gamma_\nu\Gamma_\rho+\Gamma_\rho\Gamma_\nu\Gamma_\mu=\delta_{\mu\nu}\Gamma_\rho+\delta_{\nu\rho}\Gamma_\mu$$

et l'équation (1) devient

$$\left[\sum_\mu P_\mu\Gamma_\mu+im_0c\right]\Phi=0. \qquad (2)$$

Nous déduirons l'équation du second ordre à partir de (2). Pour cela, nous séparons le terme d'indice μ et nous écrivons

$$\left[P_\mu\Gamma_\mu+\sum_\nu P_\nu\Gamma_\nu+im_0c\right]\Phi=0.$$

Multipliant par $P_\mu(1-\Gamma_\mu^2)$ et tenant compte de $\Gamma_\mu^3=\Gamma_\mu$, nous obtenons

$$\left[\sum_\nu P_\mu P_\nu\Gamma_\nu\Gamma_\mu^2+im_0cP_\mu(1-\Gamma_\mu^2)\right]\Phi=0$$

ou

$$\left[\sum_\nu\Gamma_\nu\Gamma_\mu\left(P_\nu P_\mu+\frac{ih\varepsilon}{2\pi c}F_{\mu\nu}\right)\Gamma_\mu+im_0cP_\mu(1-\Gamma_\mu^2)\right]\Phi=0,$$

$$\left[\left(\sum_\nu\Gamma_\nu\Gamma_\mu P_\nu\right)\left(-\sum_\rho P_\rho\Gamma_\rho-im_0c\right)+\sum_\nu\frac{ih\varepsilon}{2\pi c}F_{\mu\nu}\Gamma_\nu\Gamma_\mu^2+im_0c(1-\Gamma_\mu^2)P_\mu\right]\Phi=0$$

ou

$$\left[-\sum_{(\nu\rho)}(\Gamma_\nu\Gamma_\mu\Gamma_\rho)(P_\nu P_\rho-P_\rho P_\nu)-im_0c\sum_\nu\Gamma_\nu\Gamma_\mu P_\nu+im_0c(1-\Gamma_\mu^2)P_\mu+\sum_\nu\frac{ih\varepsilon}{2\pi c}F_{\mu\nu}\Gamma_\nu\Gamma_\mu^2\right]\Phi=0$$

ou encore, divisant par im_0c,

$$\left[(1-\Gamma_\mu^2)P_\mu-\sum_\nu\Gamma_\nu\Gamma_\mu R_\mu+\sum_\nu\frac{h\varepsilon}{2\pi m_0c^2}F_{\mu\nu}\Gamma_\nu\Gamma_\mu^2-\sum_{(\nu\rho)}\frac{h\varepsilon}{2\pi m_0c^2}F_{\nu\rho}\Gamma_\nu\Gamma_\mu\Gamma_\rho\right]\Phi=0.$$

Or l'équation (2) multipliée par Γ_μ s'écrit

$$\left[\Gamma_\mu^2P_\mu+\sum_{\nu\neq\mu}\Gamma_\mu\Gamma_\nu P_\nu+im_0c\Gamma_\mu\right]\Phi=0.$$

Par addition, nous en tirons

$$\left\{P_\mu+\sum_\nu(\Gamma_\mu\Gamma_\nu-\Gamma_\nu\Gamma_\mu)P_\nu+im_0c\Gamma_\mu+\frac{h\varepsilon}{2\pi m_0c^2}\left[\sum_\nu F_{\mu\nu}\Gamma_\nu\Gamma_\mu^2-\sum_{(\nu\rho)\neq\mu}F_{\nu\rho}\Gamma_\nu\Gamma_\mu\Gamma_\rho\right]\right\}\Phi=0. \qquad (3)$$

Si $P_\mu=P_4$ cette équation correspond à l'équation d'évolution pour toutes les fonctions d'ondes du corpuscule.

A partir de (2) et (3) nous allons obtenir l'équation du second ordre.

Multipliant (3) par P^μ et sommant sur μ, nous obtenons

$$\left\{P_\mu P^\mu+m_0^2c^2+\sum_{(\mu\nu)}(P_\mu P_\nu-P_\nu P_\mu)(\Gamma_\mu\Gamma_\nu-\Gamma_\nu\Gamma_\mu)+\frac{h\varepsilon}{2\pi m_0c^2}\left[\sum_{\mu,\nu}P^\mu(F_{\mu\nu}\Gamma_\nu\Gamma_\mu^2)+\sum_{\mu,(\nu\rho)\neq\mu}P^\mu F_{(\nu\rho)}\Gamma_\rho\Gamma_\mu\Gamma_\nu\right]\right\}\Phi=0$$

ou encore

$$\left\{P_\mu P^\mu+m_0^2c^2+\sum_{(\mu\nu)}\frac{h\varepsilon}{2\pi c}F_{\mu\nu}i(\Gamma_\mu\Gamma_\nu-\Gamma_\nu\Gamma_\mu)+\frac{h\varepsilon}{2\pi m_0c^2}\left[\sum_{\mu,\nu}P^\mu(F_{\mu\nu}\Gamma_\nu\Gamma_\mu^2)+\sum_{\mu,(\rho\nu)\neq\mu}P^\mu(F_{(\nu\rho)}\Gamma_\rho\Gamma_\mu\Gamma_\nu)\right]\right\}\Phi=0. \qquad (4)$$

Or, nous avons par ailleurs,

$$\left[P_\mu \Gamma_\nu \Gamma_\mu^2 + \sum_{\rho \neq \mu,\nu} P_\rho \Gamma_\nu \Gamma_\mu \Gamma_\rho + i m_0 c \Gamma_\nu \Gamma_\mu\right]\Phi = 0,$$

d'où nous tirons

$$[P_\mu \Gamma_\nu \Gamma_\mu^2 - P_\nu \Gamma_\mu \Gamma_\nu^2]\Phi = \left[i m_0 c(\Gamma_\mu\Gamma_\nu - \Gamma_\nu\Gamma_\mu) + \sum_{\rho\neq\mu,\nu} P_\rho(\Gamma_\mu\Gamma_\nu - \Gamma_\nu\Gamma_\mu)\Gamma_\rho\right]\Phi.$$

L'équation (4) devient alors

$$\Big\{ P_\mu P^\mu + m_0^2 c^2 + \sum_{(\mu\nu)} \frac{2h\varepsilon}{2\pi c} F_{\mu\nu} i(\Gamma_\mu\Gamma_\nu - \Gamma_\nu\Gamma_\mu) + \frac{h\varepsilon}{2\pi m_0 c^2}\Big[\sum_{(\mu\nu)\neq\rho,\rho} F_{\mu\nu}[P_\rho(\Gamma_\mu\Gamma_\nu - \Gamma_\nu\Gamma_\mu)\Gamma_\rho + \Gamma_\nu\Gamma_\rho\Gamma_\mu] + \sum_{(\mu\nu)}\left(\frac{-h}{2\pi i}\right)[(\partial_\mu F_{\mu\nu})\Gamma_\nu\Gamma_\mu^2 - (\partial_\nu F_{\mu\nu})\Gamma_\mu\Gamma_\nu^2] + \left(\frac{-h}{2\pi i}\right)\sum_{\rho,\mu\nu\neq\rho}(\partial_\rho F_{\mu\nu})\Gamma_\nu\Gamma_\rho\Gamma_\mu\Big]\Big\}\Phi.$$

Mais nous avons

$$\sum_{\rho,(\mu\nu)}(\partial_\rho F_{\mu\nu})\Gamma_\nu\Gamma_\rho\Gamma_\mu = \sum_{\rho,\mu\nu\neq\rho}(\partial_\rho F_{\mu\nu})\Gamma_\nu\Gamma_\rho\Gamma_\mu + \sum_{(\mu\nu)}[\partial_\nu F_{\mu\nu}\Gamma_\nu^2\Gamma_\mu + \partial_\mu F_{\mu\nu}\Gamma_\nu\Gamma_\mu^2]$$
$$= \sum_{\rho,\mu\nu\neq\rho}(\partial_\rho F_{\mu\nu})\Gamma_\nu\Gamma_\rho\Gamma_\mu + \sum_{(\mu\nu)}[(\partial_\mu F_{\mu\nu})\Gamma_\nu\Gamma_\mu^2 - (\partial_\nu F_{\mu\nu})\Gamma_\mu\Gamma_\nu^2]$$

d'où l'équation du second ordre

$$\Big\{P_\mu P^\mu + m_0^2c^2 + \sum_{(\mu\nu)}\frac{2h\varepsilon}{2\pi c}F_{\mu\nu} i(\Gamma_\mu\Gamma_\nu - \Gamma_\nu\Gamma_\mu) + \frac{h\varepsilon}{2\pi m_0 c^2}\Big[\sum_{(\mu\nu)\neq\rho,\rho}F_{\mu\nu}[P_\rho(\Gamma_\mu\Gamma_\nu\Gamma_\rho + \Gamma_\nu\Gamma_\rho\Gamma_\mu + \Gamma_\rho\Gamma_\mu\Gamma_\nu)] + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2\frac{\varepsilon}{m_0c^2}\sum_{\rho,\mu\nu}(\partial_\rho F_{\mu\nu})(i\Gamma_\nu\Gamma_\rho\Gamma_\mu)\Big]\Big\}\Phi. \quad (5)$$

Remarquons que l'on peut encore écrire le terme en $\frac{h\varepsilon}{2\pi m_0 c^2}$ sous la forme

$$\sum_{[\mu\nu\rho]}(F_{\mu\nu}P_\rho + F_{\nu\rho}P_\mu + F_{\rho\mu}P_\nu)(\Gamma_\mu\Gamma_\nu\Gamma_\rho + \Gamma_\nu\Gamma_\rho\Gamma_\mu + \Gamma_\rho\Gamma_\mu\Gamma_\nu)$$
$$= \sum_{[\mu\nu\rho]}(P_\rho F_{\mu\nu} + P_\mu F_{\nu\rho} + P_\nu F_{\rho\mu})(\Gamma_\mu\Gamma_\nu\Gamma_\rho + \Gamma_\nu\Gamma_\rho\Gamma_\mu + \Gamma_\rho\Gamma_\mu\Gamma_\nu)$$

en tenant compte de la relation

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0.$$

Nous voyons ici s'introduire le pseudovecteur

$$t_\sigma = t_{[\mu\nu\rho]} = \Gamma_\mu\Gamma_\nu\Gamma_\rho + \Gamma_\nu\Gamma_\rho\Gamma_\mu + \Gamma_\rho\Gamma_\mu\Gamma_\nu$$

associé au pseudovecteur

$$T_\sigma = [P_\rho F_{\mu\nu} + P_\mu F_{\nu\rho} + P_\nu F_{\rho\mu}] = [F_{\mu\nu}P_\rho + F_{\nu\rho}P_\mu + F_{\rho\mu}P_\nu]$$

pour donner le terme de l'équation du second ordre (en divisant par $2m_0$)

$$\frac{h\varepsilon}{4\pi m_0^2 c^2}\left(\sum_\sigma T_\sigma t_\sigma\right)$$

correspondant à une énergie potentielle supplémentaire s'ajoutant à celle provenant du moment magnétique propre.

4. Les équations du second ordre et les équations de type photonique.

— Nous considérons l'équation du corpuscule de spin $\frac{h}{2\pi}$ sous la forme donnée par M. L. de Broglie aux équations générales du photon.

$\gamma_\mu^{(1)}$, $\gamma_\mu^{(2)}$ désignant deux systèmes de matrices anticommutantes indépendantes, le corpuscule de spin $\frac{h}{2\pi}$ est représenté par les solutions de l'équation d'ondes

$$\left[\sum_\mu P_\mu \frac{1}{2}[\gamma_\mu^{(1)} + \gamma_\mu^{(2)}] + i m_0 c\right]\Phi = 0 \qquad (1)$$

que nous écrivons encore

$$\frac{1}{2}[s^{(1)} + s^{(2)}]\Phi + i m_0 c\Phi = 0 \qquad (2)$$

en introduisant les opérateurs $s^{(r)}$, $(r = 1, 2)$ tels que

$$s^{(r)} = \sum_\mu P_\mu \gamma_\mu^{(r)} \qquad (\mu = 1, 2, 3, 4).$$

L'opérateur $s^{(r)}$ est tel que

$$[s^{(r)}]^2 = P_\mu P^\mu + \sum_{(\mu\nu)}(P_\mu P_\nu - P_\nu P_\mu)\gamma_\mu^{(r)}\gamma_\nu^{(r)} = P_\mu P^\mu + \frac{h\varepsilon}{2\pi c}\sum_{(\mu\nu)} F_{(\mu\nu)} i \gamma_{\mu\nu}^{(r)}$$

en posant

$$\gamma_{\mu\nu}^{(r)} = \gamma_\mu^{(r)}\gamma_\nu^{(r)} - \delta_{\mu\nu}.$$

Les opérateurs $s^{(1)}$ et $s^{(2)}$ ne commutent pas et nous avons

$$s^{(1)}s^{(2)} - s^{(2)}s^{(1)} = \sum_{\mu,\nu} P_\mu P_\nu[\gamma_\mu^{(1)}\gamma_\nu^{(2)} - \gamma_\nu^{(1)}\gamma_\mu^{(2)}] = \sum_{(\mu\nu)}\frac{h\varepsilon}{2\pi c}F_{(\mu\nu)} i[\gamma_\mu^{(1)}\gamma_\nu^{(2)} - \gamma_\nu^{(1)}\gamma_\mu^{(2)}].$$

Nous poserons suivant l'algorithme général de la

théorie du photon

$$\frac{1}{2}[\gamma_a^{(1)}\gamma_b^{(2)} + \gamma_b^{(1)}\gamma_a^{(2)}] = \Gamma_a^b = \Gamma_b^a,$$

$$\frac{1}{2}[\gamma_a^{(1)}\gamma_b^{(2)} - \gamma_b^{(1)}\gamma_a^{(2)}] = J_a^b = -J_b^a.$$

Nous aurons donc

$$s^{(1)}s^{(2)} - s^{(2)}s^{(1)} = \frac{h\varepsilon}{\pi c}\left[\sum_{(\mu\nu)} F_{(\mu\nu)}\, \mathrm{i} J_\mu^\nu\right]. \tag{3}$$

Si nous appliquons l'opérateur $\frac{1}{2}(s_1 - s_2)$ à l'équation (2), nous obtenons

$$\left\{\frac{1}{4}[s_{(1)}^2 - s_{(2)}^2 + s^{(1)}s^{(2)} - s^{(2)}s^{(1)}] + \mathrm{i}\, m_0 c \frac{1}{2}[s_1 - s_2]\right\}\Phi = 0,$$

d'où

$$\left\{\frac{h\varepsilon}{4\pi c}\,\mathrm{i}\sum_{(\mu\nu)} F_{(\mu\nu)}[J_{\mu\nu} + J_\mu^\nu] + \mathrm{i}\, m_0 c \frac{1}{2}[s_1 - s_2]\right\}\Phi = 0$$

et finalement

$$\left\{\frac{1}{2}[s_1 - s_2] + \frac{h\varepsilon}{4\pi m_0 c^2}\left[\sum_{(\mu\nu)} F_{(\mu\nu)}[J_{\mu\nu} + J_\mu^\nu]\right]\right\}\Phi = 0. \tag{4}$$

Cette équation qui s'écrit encore

$$\left\{\sum_\mu P_\mu J_\mu + \frac{h\varepsilon}{4\pi m_0 c^2}\left[\sum_{(\mu\nu)} F_{(\mu\nu)}[J_{\mu\nu} + J_\mu^\nu]\right]\right\}\Phi = 0 \tag{5}$$

correspond à l'équation de condition associée à l'équation (1) dans la théorie du photon.

Si nous multiplions l'équation (2) par $\frac{1}{2}(s^{(1)} + s^{(2)})$, on obtient

$$\left[\frac{1}{4}[s^{(1)2} + s^{(2)2} + s^{(1)}s^{(2)} + s^{(2)}s^{(1)}] + m_0^2 c^2\right]\Phi = 0.$$

Mais l'équation (4) multipliée par $\frac{1}{2}(s^{(1)} - s^{(2)})$ donne

$$\left\{\frac{1}{4}[s^{(1)2} + s^{(2)2} - (s^{(1)}s^{(2)} + s^{(2)}s^{(1)})] + \frac{h\varepsilon}{4\pi m_0 c^2}\left(\sum_\rho P_\rho J_\rho\right)\left[\sum_{(\mu\nu)} F_{\mu\nu}(J_{\mu\nu} + J_\mu^\nu)\right]\right\}\Phi = 0,$$

d'où nous déduisons

$$\left\{P_\mu P^\mu + m_0^2 c^2 + \frac{h\varepsilon}{2\pi c}\left(\sum_{(\mu\nu)} F_{\mu\nu}\, \mathrm{i}\,\Gamma_{\mu\nu}\right) + \frac{h\varepsilon}{2\pi m_0 c^2}\left(\sum_\rho P_\rho J_\rho\right)\left[\sum_{(\mu\nu)} F_{\mu\nu}(J_{\mu\nu} + J_\mu^\nu)\right]\right\}\Phi = 0. \tag{6}$$

Nous obtenons ici une première forme d'équation du second ordre. Nous allons la préciser en calculant le dernier terme.

La règle de multiplication

$$J_a^b J_c^d = \frac{1}{2}[\Gamma_{ac}^{bc} - \Gamma_{ad}^{bc}]$$

nous donne

$$J_\rho(J_{\mu\nu} + J_\mu^\nu) = \frac{1}{2}[\Gamma_{\rho\mu\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \Gamma_{\rho\mu}^\nu - \Gamma_{\rho\nu}^\mu]$$

et si nous désignons par un indice ′ les Γ pour lesquels les indices ne prennent que des valeurs différentes, nous avons

$$J_\rho(J_{\mu\nu} + J_\mu^\nu) = \frac{1}{2}[\Gamma'_{\mu\nu\rho} - \Gamma'^{\rho}_{\mu\nu} + \Gamma'^{\nu}_{\rho\mu} - \Gamma'^{\mu}_{\rho\nu}] + \delta_{\rho\mu}[\Gamma_\nu - \Gamma'^{\mu}_{\mu\nu}] - \delta_{\rho\nu}[\Gamma_\mu - \Gamma'^{\nu}_{\nu\mu}].$$

Le terme en $\frac{h\varepsilon}{4\pi m_0 c^2}$ s'écrit alors

$$\frac{h\varepsilon}{4\pi m_0 c^2}\left[\sum_{(\mu\nu),\,\rho\neq\mu\nu} F_{(\mu\nu)}\frac{1}{2}[\Gamma'_{\mu\nu\rho} - \Gamma'^{\rho}_{\mu\nu} + \Gamma'^{\nu}_{\rho\mu} - \Gamma'^{\mu}_{\rho\nu}]P_\rho + \sum_{(\mu\nu)} F_{(\mu\nu)}[(\Gamma_\nu - \Gamma'^{\mu}_{\mu\nu})P_\mu - (\Gamma_\mu - \Gamma'^{\nu}_{\nu\mu})P_\nu] + \frac{\mathrm{i}h}{2\pi}(\partial_\rho F_{\mu\nu})\frac{1}{2}[\Gamma_{\rho\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\nu}_{\rho\mu} - \Gamma^{\mu}_{\rho\nu}]\right].$$

Or si l'on multiplie l'équation (1) par $\Gamma_{\mu\nu}$, on a avec

$$\Gamma_{\mu\nu}\Gamma_\mu = \frac{1}{2}[\Gamma^\mu_{\mu\nu} - \Gamma_\nu],$$

$$[(\Gamma^\mu_{\mu\nu} - \Gamma_\nu)P_\mu - (\Gamma^\nu_{\nu\mu} - \Gamma_\mu)P_\nu + (\Gamma'_{\mu\nu\rho} + \Gamma'^{\rho}_{\mu\nu})P_\rho + 2\mathrm{i}\, m_0 c\Gamma_{\mu\nu}]\Phi = 0,$$

d'où, pour le terme précédent, l'expression

$$\frac{h\varepsilon}{4\pi m_0 c^2}\left[\sum_{\mu\nu,\,\rho\neq\mu,\nu} F_{(\mu\nu)}\frac{1}{2}(3\Gamma'_{\mu\nu\rho} + \Gamma'^{\rho}_{\mu\nu} + \Gamma'^{\nu}_{\rho\mu} + \Gamma'^{\mu}_{\nu\rho})P_\rho + \frac{\mathrm{i}h}{2\pi}(\partial_\rho F_{\mu\nu})\frac{1}{2}(\Gamma_{\rho\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \Gamma^{\nu}_{\rho\mu} - \Gamma^{\mu}_{\rho\nu})\right] + \frac{h\varepsilon}{2\pi c}\sum_{(\mu\nu)} F_{\mu\nu}\,\mathrm{i}\,\Gamma_{\mu\nu}.$$

Reportant dans (6), il vient

$$\left\{P_\mu P^\mu + m_0^2 c^2 + \frac{h\varepsilon}{\pi c}\sum_{(\mu\nu)} F_{(\mu\nu)}\,\mathrm{i}\,\Gamma_{(\mu\nu)} + \frac{h\varepsilon}{4\pi m_0 c^2}\left[\sum_{(\mu\nu),\,\rho\neq\mu,\nu} F_{\mu\nu}\frac{1}{2}[3\Gamma_{\mu\nu\rho} + \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \Gamma^{\nu}_{\rho\mu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho}]P_\rho + \frac{h}{2\pi}\sum_{(\mu\nu),\,\rho}(\partial_\rho F_{\mu\nu})\frac{1}{2}\,\mathrm{i}[\Gamma_{\rho\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \Gamma^{\nu}_{\rho\mu} - \Gamma^{\mu}_{\rho\nu}]\right]\right\}\Phi, \tag{7}$$

Nous rapprocherons l'équation (7) de celle que nous avons obtenue dans le formalisme général de

la Partie 3. Nous avons, en effet,

$$\Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu = \Gamma_{\mu\nu},$$

$$\Gamma_\mu \Gamma_\nu \Gamma_\rho + \Gamma_\nu \Gamma_\rho \Gamma_\mu + \Gamma_\rho \Gamma_\mu \Gamma_\nu = \frac{1}{4}\left[3\Gamma'_{\mu\nu\rho} + \Gamma'^{\rho}_{\mu\nu} + \Gamma'^{\mu}_{\nu\rho} + \Gamma'^{\nu}_{\rho\mu}\right],$$

$$\Gamma_\nu \Gamma_\rho \Gamma_\mu = \frac{1}{4}\left[\Gamma_{\nu\rho\mu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} + \Gamma^{\rho}_{\nu\mu} + \Gamma^{\nu}_{\rho\mu}\right]$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} &\sum_{(\mu\nu),\rho} (\partial_\rho F_{\mu\nu}) \Gamma_\nu \Gamma_\rho \Gamma_\mu \\ &= \sum_{(\mu\nu),\rho} (\partial_\rho F_{\mu\nu}) \frac{1}{4}\left[\Gamma_{\nu\rho\mu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} + \Gamma^{\rho}_{\nu\mu} + \Gamma^{\nu}_{\rho\mu}\right] \\ &= \sum_{(\mu\nu),\rho} (\partial_\rho F_{\mu\nu}) \frac{1}{4}\left[\Gamma_{\rho\mu\nu} + 2\delta_{\rho\mu}\Gamma_\nu - 2\delta_{\rho\nu}\Gamma_\mu \right. \\ &\qquad \left. - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \Gamma^{\nu}_{\rho\mu} - \Gamma^{\mu}_{\rho\nu} + 2\delta_{\rho\nu}\Gamma_\mu\right], \\ &= \sum_{(\mu\nu),\rho} (\partial_\rho F_{\mu\nu}) \frac{1}{4}\left[\Gamma_{\rho\mu\nu} + \Gamma^{\nu}_{\rho\mu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\mu}_{\rho\nu}\right] \end{aligned}$$

en tenant compte de $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$.

Il y a donc bien équivalence entre l'équation (7) ci-dessus et l'équation (5.3).

Divisant par $2m_0c$, nous avons donc l'équation du second ordre du corpuscule de spin $\frac{h}{2\pi}$ sous les formes équivalentes,

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2m_0}\left[P_\mu P^\mu + m_0^2 c^2\right] \\ &+ \frac{h\varepsilon}{2\pi m_0 c}\left[\sum_{(\mu\nu)} F_{\mu\nu}\, i(\Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu)\right] \\ &+ \frac{h\varepsilon}{4\pi m_0^2 c^2}\left[\sum_{(\mu\nu),\rho\neq\mu,\nu} F_{\mu\nu} P_\rho (\Gamma_\mu \Gamma_\nu \Gamma_\rho + \Gamma_\nu \Gamma_\rho \Gamma_\mu + \Gamma_\rho \Gamma_\mu \Gamma_\nu)\right] \\ &+ \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \frac{\varepsilon}{2m_0^2 c^2}\left[\sum_{\mu\nu,\rho} (\partial_\rho F_{\mu\nu})(i\Gamma_\nu \Gamma_\rho \Gamma_\mu)\right] \end{aligned} \right\} \Phi = 0 \qquad (8)$$

et

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2m_0}\left[P_\mu P^\mu + m_0^2 c^2\right] + \frac{h\varepsilon}{2\pi m_0 c}\left[\sum_{(\mu\nu)} F_{(\mu\nu)}\, i\Gamma_{\mu\nu}\right] \\ &+ \frac{h\varepsilon}{16\pi m_0^2 c^2}\left[\sum_{(\mu\nu),\rho\neq\mu,\nu} F_{(\mu\nu)}\left[3\Gamma_{\mu\nu\rho} + \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \Gamma^{\nu}_{\rho\mu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho}\right] P_\rho\right] \\ &+ \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \frac{\varepsilon}{8m_0^2 c^2} \\ &\times \left[\sum_{(\mu\nu),\rho} (\partial_\rho F_{\mu\nu})\, i(\Gamma_{\rho\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \Gamma^{\nu}_{\rho\mu} - \Gamma^{\mu}_{\rho\nu})\right] \end{aligned} \right\} \Phi = 0. \qquad (9)$$

Dans le cas du méson scalaire, les conditions de réduction du système des matrices Γ_μ donnent

$$\Gamma_\mu \Gamma_\nu \Gamma_\rho = 0 \quad \text{pour} \quad \mu \neq \nu \neq \rho$$

et

$$\Gamma_\nu \Gamma_\mu^2 = \Gamma_\nu \Gamma_\rho^2 = T_\nu,$$

de telle sorte que l'équation (8) se réduit à

$$\left\{ \frac{1}{2m_0}\left[P_\mu P^\mu + m_0^2 c^2\right] + \frac{h\varepsilon}{2\pi m_0 c}\left[\sum_{(\mu\nu)} F_{(\mu\nu)}\, i(\Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu)\right] \right\} \Phi = 0.$$

Dans les équations (8) et (9) nous voyons apparaître un terme correspondant à l'énergie potentielle d'origine électromagnétique

$$\frac{h\varepsilon}{2\pi m_0 c} \sum_{(\mu\nu)} F_{(\mu\nu)}\, i(\Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu).$$

Si l'on remarque que les valeurs propres de la matrice $i(\Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu)$ sont 0, ± 1, on voit que l'on peut considérer le méson comme possédant un moment électromagnétique propre de valeurs propres

$$0, \quad \pm \frac{h\varepsilon}{2\pi m_0 c}$$

correspondant au magnéton mésique.

(Pour l'électron de spin $\frac{h}{4\pi}$, le magnéton est $\pm \frac{h\varepsilon}{4\pi m_0 c}$.)

Mais alors que dans la théorie de l'électron le terme d'énergie magnétique propre était seul à compléter l'équation du second ordre classique, nous voyons ici que dans la théorie du méson deux autres termes s'introduisent et caractérisent la « structure quantique » du méson plus complexe que celle de l'électron.

Je remercie M. Louis de Broglie pour la bienveillante attention qu'il a apportée à ce travail.

Manuscrit reçu le 22 avril 1947.

IMAGES MICROSCOPIQUES CORRESPONDANT A UN ÉLECTRON ILLUMINÉ

Par M. RISCO.

Sommaire. — Ce travail est en rapport avec l'expérience du microscope imaginaire de Heisenberg. L'étude théorique des images produites par le faisceau diffusé par effet Compton conduit à des renseignements relatifs à la source effective d'émission. Il ne s'agirait pas d'un électron nu, mais d'une particule complexe animée de la « vitesse équivalente », que l'on retrouve ainsi par une méthode qui appartient purement à l'optique géométrique. Dans le développement de notre étude, par application de la règle donnée pour la formation d'images ponctuelles mobiles, les conditions d'Abbe et de Herschell se présentent spontanément et sous un autre aspect.

Comme son titre l'indique, ce travail a un but bien défini. Il est en rapport avec l'expérience microscopique imaginaire dont Heisenberg s'est servi dans un de ses raisonnements sur le principe d'indétermination ([1]). Les conditions optiques de la formation de l'image n'ont été qu'esquissées, et il nous semble qu'une étude poussée de ce sujet et spécialement une analyse interprétative de l'image, pourrait offrir un certain intérêt.

Nous devons dire que, dès le moment où nous avons entrepris notre étude, nous nous sommes trouvé devant la difficulté d'admettre qu'un faisceau de rayons diffusés de Compton soit apte à produire l'image d'un électron en mouvement de recul. En effet, la source, de dimensions réduites, due au mécanisme ponctuel des émissions Compton, sert d'origine à deux sortes de particules : les photons et les électrons de recul, et si l'on peut utiliser les premiers dans un microscope de rayons X pour avoir une information sur sa source de départ, on pourrait tout aussi bien, dans le même but, recueillir les électrons dans un microscope électronique. Cette analogie de rôle entre les deux sortes de particules en mouvement nous permet d'envisager l'émission par effet Compton comme un double faisceau photo-électronique. Certains rayons de ce faisceau, et tel est le cas des photons diffusés, ne sauraient donner à travers un instrument d'optique l'image d'électrons en mouvement qui constituent eux aussi d'autres rayons du faisceau. On doit plutôt s'attendre à trouver dans l'étude théorique de ces expériences avec les deux sortes de microscopes une origine commune pour les photons et électrons de Compton.

Nous ne nous référerons cependant qu'à la radiation diffusée dans la présente étude systématique, dont la rigueur relativiste des calculs, développés pour des faisceaux de grande ouverture, est justifiée par le caractère du sujet même.

Commençons par l'exposé d'une question préalable.

Conditions nécessaires pour la formation d'une image optique au moyen d'un faisceau de rayons homocentriques de différentes longueurs d'onde. — Considérons dans l'axe d'un instrument d'optique un point P, rigoureusement stigmatique, qui est le sommet d'un faisceau très ouvert caractérisé par une certaine distribution de longueurs d'onde. Nous supposons réalisé comme on fait d'habitude l'achromatisme du système pour le point P.

La multiplicité des longueurs d'onde incidentes, subsistant dans le faisceau émergent, empêche la formation en P', conjugué du point P, d'une image interférentielle fixe par rapport à l'appareil. On doit s'attendre à la production d'une image mobile, mais il faut se demander quelles sont les conditions qui définissent cette image et qui autorisent sa formation. Il s'agit d'établir comme pour les images fixes une base rationnelle qui conditionne la naissance des images ponctuelles mobiles.

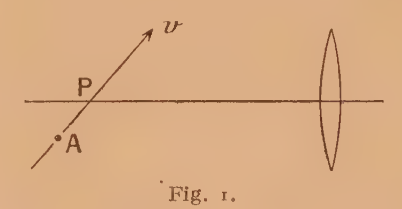


Fig. 1.

Nous devons mentionner comme cas le plus intéressant celui d'un point lumineux A qui, animé d'une vitesse v (*fig.* 1) et traversant l'axe optique au point stigmatique P, donne naissance par effet Doppler à un faisceau dont les rayons ont des longueurs d'onde variant de l'un à l'autre et qui est reçu dans un instrument de grande ouverture.

Mais revenant à notre forme d'exposition plus générale, nous dirons qu'une étude soigneuse du problème nous a conduit à l'adoption du critérium qui exprime la règle suivante :

Règle de formation d'images ponctuelles mobiles. — *Si un point stigmatique P est le sommet d'un faisceau défini par une certaine distribution de longueurs d'onde et qui pénètre dans un instrument d'ouverture quelconque, il se formera une image ponctuelle mobile A′ (fig. 2 a et 2 b) quand un*

([1]) Heisenberg, *Les principes physiques de la théorie des quanta*, 1932, p. 15.

observateur relativiste qui accompagne cette image dans son mouvement attribue une commune longueur d'onde à tous les rayons du faisceau.

La direction et la grandeur de la vitesse avec laquelle doit se mouvoir cet observateur pour réaliser l'égalisation des longueurs d'onde pour tous les rayons du faisceau émergent, sont la direction et la grandeur de la vitesse de l'image ponctuelle mobile.

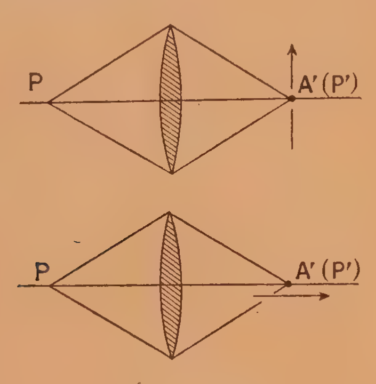


Fig. 2*a* et 2*b*.

Les résultats correspondant aux nombreux cas auxquels cette règle sera appliquée dans les pages qui vont suivre, constituent sa meilleure justification. Nous verrons que, en général, pour qu'il soit possible d'arriver à l'égalisation des longueurs d'onde qui est à la base de l'application de la règle, il faut que le point P, en plus de stigmatique remplisse quelque autre condition supplémentaire. Comme P est un point de l'axe instrumental et comme le faisceau employé aura toujours un axe de symétrie, nous trouverons que la condition additionnelle est soit celle d'Abbe, soit celle de Herschell, suivant les données du problème optique.

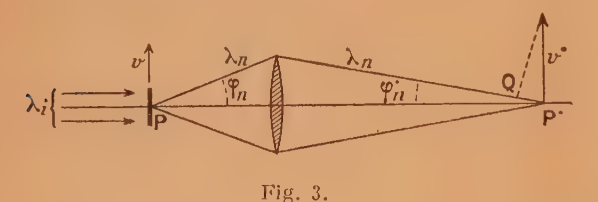


Fig. 3.

Pour des raisons d'exposition, nous allons développer avant tout un des nombreux exemples dont nous nous sommes servi pour mettre à l'épreuve la règle que nous venons d'énoncer.

Exceptionnellement, nous utiliserons dans cet exemple, au lieu d'un point, un petit élément d'un réseau de diffraction normal à l'axe du microscope et dont les traits sont perpendiculaires au plan de la figure. Le réseau est animé d'une vitesse v normale à ses traits et qui le déplace dans son propre plan (*fig.* 3). Il traverse l'axe au point P que nous supposerons maintenant aplanatique. L'illumination se fait par des rayons parallèles de longueur d'onde λ_i qui suivent la direction de l'axe instrumental. Nous appellerons k la constante du réseau, c'est-à-dire la distance entre deux traits consécutifs mesurée au repos.

Le mouvement introduit, en même temps que des changements dans les angles de position, des différences de longueurs d'onde entre les rayons diffractés appartenant aux divers maximums principaux. On peut facilement obtenir les formules suivantes qui donnent pour un observateur en repos par rapport au microscope l'angle de position φ_n et la longueur d'onde λ_n correspondant à un maximum d'ordre n (positif ou négatif selon sa direction par référence à la normale) :

$$\sin\varphi_n = \frac{na\lambda_i}{k + nb\lambda_i}, \tag{1}$$

$$\lambda_n = \frac{k\lambda_i}{k + nb\lambda_i}, \tag{2}$$

a et b (notations de Lorentz) représentent les quantités

$$a = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \qquad b = \frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

Nous disposons en somme d'une certaine distribution de rayons bien définie [formules (1) et (2)] qui partent du point P (réseau élémentaire) vers l'objectif du microscope. Tous ces rayons se rejoignent au point conjugué $P^{\bullet}$ constituant un nouveau faisceau dans lequel la loi de distribution de longueurs d'onde n'est plus la même, car si chaque rayon individuel a conservé évidemment sa propre fréquence, il a changé d'inclinaison par rapport à l'axe optique. L'angle $\varphi_n^{\bullet}$ (*fig.* 3) qui forme le rayon émergent d'ordre n avec l'axe peut se calculer immédiatement, en fonction de l'angle φ_n du correspondant rayon incident, au moyen de la condition d'aplanatisme d'Abbe, qui s'écrit dans notre cas,

$$-\frac{\sin\varphi_n^{\bullet}}{\sin\varphi_n} = \frac{1}{G},$$

G étant le grandissement latéral au point P.

Par substitution de la valeur (1) de $\sin\varphi_n$ et adjonction de la formule (2), nous trouvons donc les équations suivantes qui définissent la distribution des rayons autour du nouveau sommet $P^{\bullet}$

$$\sin\varphi_n^{\bullet} = -\frac{na\lambda_i}{G(k + nb\lambda_i)}, \tag{3}$$

$$\lambda_n = \frac{k\lambda_i}{k + nb\lambda_i}. \tag{4}$$

Il ne reste maintenant qu'à appliquer la règle que nous avons formulée selon laquelle la garantie de la formation d'une image mobile, animée d'une vitesse $v^{\bullet}$, que dans le cas présent nous choisirons normale à l'axe, est fournie par l'égalité des longueurs

d'onde pour un observateur qui se déplace avec ladite vitesse.

Le plus simple est d'établir cette égalisation en raisonnant comme le ferait un observateur fixe par rapport aux appareils. D'après lui, le rayon n s'offrirait à l'observateur mobile sous la longueur d'onde apparente

$$\lambda_A = \frac{c}{c + \overline{QP^\bullet}} \lambda_n = \frac{c}{c + v^\bullet \sin \varphi_n^\bullet} \lambda_n.$$

En substituant dans cette expression les valeurs (3) et (4), on obtient finalement

$$\lambda_A = \frac{ckG\lambda_i}{ckG + n(cbG - v^\bullet a)\lambda_i}. \qquad (5)$$

Pour que λ_A soit indépendante du rayon utilisé, c'est-à-dire de toute valeur de n, il faut donc que

$$cbG - v^\bullet a = 0,$$

équation de laquelle on déduit comme vitesse de l'image formée

$$v^\bullet = \frac{cb}{a} G = vG.$$

Nous arrivons ainsi à un quotient des vitesses, de l'image à l'objet, égal au grandissement latéral du système optique pour le point P, et ce résultat final vient évidemment appuyer la règle que nous avons proposée.

La valeur de la longueur d'onde apparente (5) devient $\lambda_A = \lambda_i$, d'accord avec l'inexistence, au point de vue classique, de l'effet Doppler transversal. Par application des formules relativistes on obtient

$$\lambda_i \sqrt{1 - \frac{v^{\bullet 2}}{c^2}}$$

comme vraie valeur de la longueur d'onde pour l'observateur mobile, qui n'apprécie qu'un changement spectral de 2e ordre.

Images correspondant à un électron initialement au repos. — Pour commencer l'étude de la formation d'images par les émissions photo-électroniques de Compton, étude qui nous conduira à des renseignements relatifs à la source émettrice, considérons seulement dans ce travail le cas où l'image est produite au moyen de la radiation diffusée.

Nous allons supposer que l'électron ou les électrons, initialement au repos, qui interviennent dans la production de l'effet Compton se trouvent situés au point stigmatique P (*fig.* 4) ou dans un volume élémentaire qui l'entoure. Le photon incident (longueur d'onde λ_0) suit la direction même de l'axe de l'instrument.

Dans de telles conditions, cet axe est un axe de symétrie pour le faisceau de rayons diffusés qu'on obtient et dans lequel la distribution de longueurs d'onde en fonction de l'inclinaison $u = -\theta$ du rayon est donnée par la formule

$$\lambda = \lambda_0[1 + \alpha(1 - \cos\theta)] = \lambda_0[1 + \alpha(1 - \cos u)],$$

où α représente toujours la valeur $\frac{h\nu_0}{m_0 c^2}$.

Traversant l'appareil, ce faisceau se transforme en un autre ayant son sommet au point stigmatique

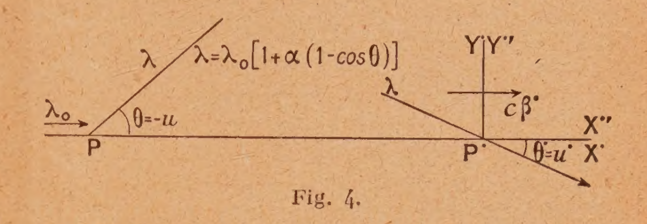


Fig. 4.

conjugué $P^\bullet$ et caractérisé par une nouvelle distribution de longueurs d'onde. Chaque rayon en effet conserve la sienne propre mais change d'inclinaison par rapport à l'axe selon une équation de convergence

$$f(u, u^\bullet) = 0$$

dépendant des propriétés de l'appareil d'optique pour le couple de points conjugués $P, P^\bullet$. Le système d'équations

$$f(u, u^\bullet) = 0, \qquad (6)$$

$$\lambda = \lambda_0[1 + \alpha(1 - \cos u)], \qquad (7)$$

où nous prendrons $u^\bullet$ comme variable indépendante, définit donc la loi de distribution de longueurs d'onde dans le nouveau faisceau.

La fonction f dont nous disposons va nous permettre d'imposer une égale longueur d'onde à tous les rayons dans les mesures faites par un observateur animé d'une vitesse adéquate. Celle-ci équivaut, en application de la règle proposée, à la vitesse de l'image ponctuelle que nous cherchons et que, pour des raisons de symétrie, ne peut se mouvoir dans le cas présent, qu'en suivant l'axe du microscope.

Dans la figure 4 sont tracés les axes $X^{\bullet\prime}$ $Y^{\bullet\prime}$ qui accompagnent l'image mobile. Nous appelons $c\beta^\bullet$ sa vitesse par rapport à un référenciel $X^\bullet$ $Y^\bullet$ fixé à l'appareil et ayant pour origine le point $P^\bullet$.

En utilisant les formules relativistes de l'effet Doppler on obtient immédiatement la longueur d'onde λ' et l'inclinaison u' que l'observateur de X'' Y'' attribue à un rayon appartenant au faisceau (6), (7), c'est-à-dire à un rayon caractérisé dans le système $X^\bullet Y^\bullet$ par la longueur d'onde λ et l'inclinaison $u^\bullet$. Nous arrivons notamment à la valeur

$$\lambda' = \lambda \frac{\sqrt{1 - \beta^{\bullet 2}}}{1 - \beta^\bullet \cos u^\bullet},$$

ou bien, en tenant compte de (7),

$$\lambda' = \lambda_0 \sqrt{1 - \beta^{\bullet 2}} \frac{1 + \alpha(1 - \cos u)}{1 - \beta^\bullet \cos u^\bullet}. \qquad (8)$$

Il nous faut maintenant exprimer qu'indépendamment du rayon considéré, λ' est une constante. Or, comme cette valeur invariable doit être évidemment celle que λ' acquiert pour $u = u^{\cdot} = 0$, on arrive à l'équation

$$\frac{1 + \alpha(1 - \cos u)}{1 - \beta^{\cdot} \cos u^{\cdot}} = \frac{1}{1 - \beta^{\cdot}}, \tag{9}$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\sin \frac{u^{\cdot}}{2}}{\sin \frac{u}{2}} = \sqrt{\alpha \frac{1 - \beta^{\cdot}}{\beta^{\cdot}}}. \tag{10}$$

En définitive nous nous trouvons donc en présence d'une formule bien connue dans la théorie des instruments d'optique : la condition dite de Herschell qui exprime la constance du rapport entre les sinus des demi-angles d'inclinaison d'un rayon et de son conjugué.

Nous pouvons en conséquence affirmer que la condition supplémentaire (6) qui doit satisfaire le point stigmatique P pour qu'on obtienne, sans restriction d'ouverture, une image optique au moyen des rayons diffusés de Compton, quand le photon primaire suit l'axe du microscope, est bien la condition de Herschell. Elle joue donc un rôle important, qui n'avait pas été mentionné, dans les pseudo-observations du type imaginé par Heisenberg.

Il convient de noter que, comme le cas jusqu'ici étudié implique un mouvement de l'image ponctuelle dans la direction de l'axe de l'instrument, il n'y a aucune composante observable (transversale) de la vitesse.

Après l'analyse détaillée que nous avons faite de la formation de l'image, on peut essayer d'obtenir quelques renseignements relatifs à l'objet, c'est-à-dire à la source même des émissions Compton.

Une formule élémentaire va nous servir comme point de départ. Considérons sur l'axe du microscope un point quelconque P et son image $P^{\cdot}$ obtenue, selon l'approximation de Gauss, avec des rayons peu inclinés. Soit A le grandissement axial correspondant à ce couple de points conjugués. Si une source ponctuelle, en mouvement le long de l'axe, traverse le point P avec une vitesse v, on obtiendra au point $P^{\cdot}$ une image se déplaçant sur l'axe et dont on peut calculer la vitesse $v^{\cdot}$, en fonction de v et A, au moyen de raisonnements simples fondés sur la notion de chemin optique. On arrive à la formule

$$\frac{1}{v^{\cdot}} = \frac{1}{c} + \frac{1}{A}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{c}\right),$$

qui conduit à l'expression suivante du grandissement axial

$$A = \frac{c - v}{v} : \frac{c - v^{\cdot}}{v^{\cdot}}, \tag{11}$$

ou bien, en faisant usage des notations $\beta = \frac{v}{c}$, $\beta^{\cdot} = \frac{v^{\cdot}}{c}$,

$$A = \frac{1 - \beta}{\beta} : \frac{1 - \beta^{\cdot}}{\beta^{\cdot}}. \tag{12}$$

Si maintenant, au lieu de considérer un point quelconque, nous choisissons un point de l'axe qui soit rigoureusement stigmatique et satisfasse en outre à la condition de Herschell, nous pouvons écrire

$$\frac{\sin \frac{u^{\cdot}}{2}}{\sin \frac{u}{2}} = \sqrt{\frac{1}{A}} = \text{const.},$$

et par substitution de (12),

$$\frac{\sin \frac{u^{\cdot}}{2}}{\sin \frac{u}{2}} = \sqrt{\frac{\beta}{1 - \beta} \, \frac{1 - \beta^{\cdot}}{\beta^{\cdot}}}. \tag{13}$$

Il suffit de comparer cette équation avec la (10) pour en déduire immédiatement que

$$\frac{\beta}{1 - \beta} = \alpha,$$

autrement dit que

$$\beta c = \frac{\alpha c}{1 + \alpha}. \tag{14}$$

Nous trouvons donc comme vitesse de l'objet la « vitesse équivalente » de Compton.

On arrive au même résultat si l'on illumine les électrons situés en P au moyen de photons dirigés normalement à l'axe du microscope. Mais dans ce cas on démontre que le point P doit être un point aplanatique, caractérisé par la condition

$$\frac{\sin u^{\cdot}}{\sin u} = \text{const.}$$

En résumé, pour des électrons initialement au repos, les images optiques que l'on obtient avec le faisceau de rayons X diffusés correspondent toujours à des points-objet se mouvant avec la « vitesse équivalente » de Compton dans la direction et le sens des photons illuminants.

Images correspondant à un électron doué d'une vitesse initiale. — Supposons maintenant que les électrons de P sont animés initialement d'une vitesse $\beta_0 c$ dirigée, par exemple, normalement à l'axe du microscope (*fig.* 5). Prenons comme direction de propagation du photon incident $h\nu_0$ la direction même de cette vitesse primaire.

Dans de telles conditions, la fréquence de la radiation diffusée par effet Compton est représentée par la formule

$$\nu = \nu_0 \frac{1 - \beta_0}{1 - \beta_0 \cos\theta + 2\alpha\sqrt{1 - \beta_0^2}\,\sin^2\frac{\theta}{2}},$$

θ étant l'angle que forme le rayon avec la direction d'illumination.

Si nous désignons par u l'inclinaison de ce rayon par rapport à l'axe optique, $u = \theta - \frac{\pi}{2}$ et la longueur d'onde λ peut s'écrire

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{1 - \beta_0}\left[1 + \beta_0 \sin u + \alpha\sqrt{1 - \beta_0^2}\,(1 + \sin u)\right]. \quad (15)$$

Le faisceau de sommet P que cette équation représente est transformé par l'appareil et donne naissance à un faisceau qui a pour sommet le point conjugué $P^{\bullet}$. Or, pour chaque trajectoire lumineuse,

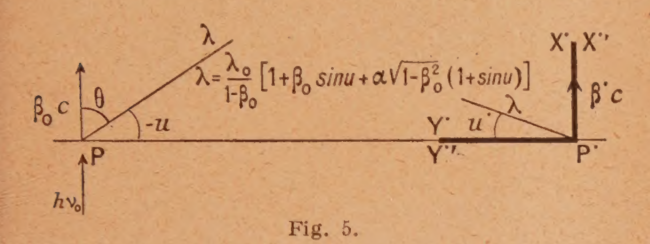


Fig. 5.

λ a la même valeur à l'entrée et à la sortie de l'instrument, le rayon ne changeant que d'inclinaison. Donc, pour représenter le faisceau émergent il suffit d'associer à (15) une certaine équation de convergence

$$F(u, u^{\bullet}) = 0 \quad (16)$$

caractérisant les propriétés géométriques du couple de points stigmatiques conjugués P, $P^{\bullet}$.

Comme dans le cas précédemment étudié, l'application de la règle qui garantit la formation d'une image va nous servir pour déterminer la fonction F.

Avant tout, il est évident qu'on ne peut s'attendre qu'à la production d'une image mobile dans la direction normale à l'axe instrumental, car le faisceau (15) admis par l'objectif est symétrique par rapport à une droite qui a précisément cette direction.

Nous choisirons donc des axes coordonnés orientés comme la figure l'indique. Le système $X^{\bullet}Y^{\bullet}$ sera considéré comme fixe, avec origine en $P^{\bullet}$, et $X^{\bullet\prime}Y^{\bullet\prime}$ aura une vitesse, que nous appellerons $c\beta^{\bullet}$, par rapport à l'appareil.

Maintenant, pour l'observateur qui se meut avec ce système $X^{\bullet\prime}Y^{\bullet\prime}$, un rayon qui avait en $X^{\bullet}Y^{\bullet}$ la longueur d'onde λ et l'inclinaison $u^{\bullet}$ présente par effet Doppler et aberration une nouvelle longueur d'onde λ' et une autre inclinaison $u^{\bullet\prime}$. En particulier on peut écrire

$$\lambda' = \lambda\,\frac{\sqrt{1 - \beta^{\bullet 2}}}{1 + \beta^{\bullet}\sin u^{\bullet}},$$

et par substitution de (15),

$$\lambda' = \lambda_0\,\frac{\sqrt{1 - \beta^{\bullet 2}}}{1 - \beta_0}\,\frac{1 + \alpha\sqrt{1 - \beta_0^2} + \left(\beta_0 + \alpha\sqrt{1 - \beta_0^2}\right)\sin u}{1 + \beta^{\bullet}\sin u^{\bullet}}. \quad (17)$$

Il ne reste qu'à exprimer que λ' a la même valeur quelle que soit la trajectoire lumineuse. On arrive ainsi à la relation

$$\frac{\sin u^{\bullet}}{\sin u} = \frac{\beta_0 + \alpha\sqrt{1 - \beta_0^2}}{\beta^{\bullet}\left(1 + \alpha\sqrt{1 - \beta_0^2}\right)}, \quad (18)$$

qui permettrait de calculer immédiatement, au moyen de (17), la commune longueur d'onde observée.

En somme, l'équation (18) imposant la constance du quotient des sinus des inclinaisons, il en résulte que le point P, en plus de stigmatique, doit être aplanatique si l'on veut produire, en utilisant des photons incidents dirigés perpendiculairement à l'axe du microscope, une image (ponctuelle et mobile) avec les rayons X diffusés par effet Compton. En tenant compte de la méthode appliquée, ce résultat est évidemment compatible avec une vitesse initiale des électrons, si celle-ci (représentée par $\beta_0 c$ dans la formule (18) a la même direction que les photons incidents.

Comme nous l'avons fait dans l'exemple précédent, essayons maintenant d'obtenir les informations possibles sur l'objet-source des émissions Compton.

Pour cela commençons par écrire l'expression du grandissement latéral G correspondant à un point quelconque de l'axe sous la forme, facilement démontrable,

$$G = \frac{v^{\bullet}}{v} = \frac{\beta^{\bullet}}{\beta}, \quad (19)$$

$v = \beta c$ est la vitesse d'une source lumineuse ponctuelle qui traverse perpendiculairement l'axe au point considéré, et $v^{\bullet} = \beta^{\bullet} c$ représente la vitesse de l'image correspondante. Ce sont des notations — il convient de le noter — dont la signification ne concorde pas avec celle que nous avons attribuée aux mêmes lettres dans le paragraphe antérieur et, en particulier, dans (11), (12) et (13), où il s'agit de vitesses axiales.

Enfin, grâce à la formule (19), la « condition d'Abbe »

$$\frac{\sin u^{\bullet}}{\sin u} = \frac{1}{G} = \text{const.}$$

devient

$$\frac{\sin u^{\bullet}}{\sin u} = \frac{\beta}{\beta^{\bullet}} \quad (20)$$

et il suffit de comparer cette égalité avec la (18) pour trouver comme résultat final

$$\beta = \frac{\beta_0 + \alpha\sqrt{1 - \beta_0^2}}{1 + \alpha\sqrt{1 - \beta_0^2}}. \quad (21)$$

Comme on pouvait s'y attendre, on arrive à la même formule en utilisant pour la formation de l'image microscopique un faisceau de diffusion produit par des photons qui suivent la direction de l'axe, le long duquel les électrons de Compton auraient aussi leur vitesse initiale $\beta_0 c$. Le point stigmatique P doit alors remplir par rapport à l'ins-

trument la condition bien connue de Herschell, car on obtient, en appliquant toujours la règle établie,

$$\frac{\beta_0 + \alpha\sqrt{1-\beta_0^2}}{1-\beta_0}\sin^2\frac{u}{2} = \frac{\beta^*}{1-\beta^*}\sin^2\frac{u^*}{2},$$

que l'on écrit aussi

$$\frac{\sin\frac{u^*}{2}}{\sin\frac{u}{2}} = \sqrt{\frac{\beta_0 + \alpha\sqrt{1-\beta_0^2}}{1-\beta_0}\,\frac{1-\beta^*}{\beta^*}}.$$

En comparant ensuite cette expression avec la (13) il vient

$$\frac{\beta}{1-\beta} = \frac{\beta_0 + \alpha\sqrt{1-\beta_0^2}}{1-\beta_0},$$

d'où l'on tire en effet la formule (21) qui correspond dans ce cas à une vitesse βc orientée selon l'axe, c'est-à-dire toujours dirigée comme les photons incidents.

En somme : par une méthode qui appartient strictement à l'optique géométrique et qui est basée sur l'interprétation de certaines images théoriques dues aux rayons X diffusés, nous avons été conduit à la détermination d'une vitesse attribuable à la source d'émission. Cette vitesse — formule (21) — est réellement une « vitesse équivalente » de Compton : celle qui est propre au cas d'électrons initialement en mouvement. En effet, à la suite du choc avec un électron de masse m_0 et de vitesse $\beta_0 c$, un photon $h\nu_0$ qui se propage dans la même direction, formerait une particule intermédiaire et instable que l'on peut considérer comme un « électron modifié » (²) de vitesse βc et qui a une nouvelle masse au repos μ_0. L'application des principes de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement nous donne les équations

$$h\nu_0 + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta_0^2}} = \frac{\mu_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$\frac{h\nu_0}{c} + \frac{m_0\beta_0 c}{\sqrt{1-\beta_0^2}} = \frac{\mu_0\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

conduisant effectivement à la même valeur

$$\beta = \frac{\beta_0 + \alpha\sqrt{1-\beta_0^2}}{1+\alpha\sqrt{1-\beta_0^2}},$$

que nous avions trouvée dans les pseudo-observations microscopiques.

Conclusions. — L'étude systématique de la formation d'images au moyen des rayons X diffusés mène à quelques résultats ayant trait à la source effective des émissions Compton. On ne peut cependant les obtenir que si l'on prend en considération la totalité des rayons, sans restreindre l'ouverture du faisceau utilisé. Il est par conséquent nécessaire de faire les calculs avec des formules complètes, à l'exception de toute approximation.

Le problème est aussi caractérisé par le fait que la longueur d'onde diffère d'un rayon à l'autre au sein du faisceau que l'instrument recueille, et ce changement est traduit par la mobilité des images obtenues.

Toutes ces circonstances nous ont conduit à l'adoption de la règle ou principe que nous avons constamment appliqué dans la recherche des conditions qui président à la formation de l'image ponctuelle et dans le calcul de sa vitesse.

En outre du résultat final relatif à la source même des émissions Compton, on pourrait peut-être estimer comme le meilleur appui en faveur de la règle énoncée, l'apparition spontanée, que l'on a pu noter, des deux formules qui sont classiques dans la microscopie ordinaire : la formule d'Abbe et celle de Herschell, qui prennent ici un nouvel aspect.

Ajoutons que, comme conséquence de l'emploi d'une grande ouverture, la direction d'illumination, loin d'être indifférente, se trouve imposée par les conditions concrètes d'observation. On devrait par exemple diriger les photons illuminants perpendiculairement à l'axe du microscope dans le cas où le petit domaine irradié serait situé en un point aplanatique.

Finalement, par l'étude interprétative de l'image, nous sommes parvenu à obtenir des renseignements, que nous allons souligner, sur la source originelle des émissions Compton. Celle-ci ne pourrait être un simple électron nu, comme l'admet implicitement Heisenberg, mais bien une particule complexe qui se meut toujours dans la direction des photons incidents et avec la « vitesse équivalente » de Compton, que l'on retrouve ici au moyen d'une technique microscopique spéciale.

Quelques essais que nous avons faits semblent favorables à une extension de la règle formulée aux images produites par des rayons corpusculaires.

Manuscrit reçu le 10 décembre 1946.

(²) Edmond Bauer, Pierre Auger et Francis Perrin, *Sur la théorie de la diffusion des rayons X. C. R. Acad. Sci.*, 1923, 177, p. 1211.

Le Gérant : Maurice Blondin. 125834 Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris. — 1947.